HIT

数学 · 统计学系列

Inequality in the Tetrahedron

四面体不等式

樊益武　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

四面体不等式

Inequality in the Tetrahedron

樊益武 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

⊙ 前 言

三角形是平面中最简单的多边形，它具有一系列优美性质，成为人们探求平面几何奥秘的基础. 四面体是立体空间中最简单的多面体，因此四面体可看成是三角形在空间的自然推广. 人们对三角形不等式的研究已经很深入了，已取得了成千上万个成果，其中许多重要的结论都可以推广到四面体中. 而四面体又不同于三角形，它既有面又有棱，还有各种不同的角，其内涵更加丰富. 近年来，随着凸体几何的深入研究，人们希望把许多重要的三角形不等式推广到 n 维单纯形中，四面体是推广中的一道坎. 一般来说，能推广到四面体，也就可能找到推广到单纯形的方法了. 事实上，四面体不等式已经成为几何不等式的重要组成部分.

然而，多年来，关于四面体不等式的研究一直是一个被忽视的角落，也可能是缺乏有效的方法，研究相对滞后，成果寥寥无几. 直到 1980 年以后，随着四面体的一些性质陆续出现，相继发现一批漂亮的体积公式，激发了人们对四面体的研究兴趣. 特别是杨路于 1987 年发表了《来自四面体的挑战》一文，提出关于四面体的十个问题，促进了对四面体问题和四面体不等式的研究. 到了 20 世纪 90 年代，四面体不等式有了更多更好的发现，在这方面，杨路、单墫、陈计、杨学枝、苏化明、杨世国、冷岗松、孔令恩、沈文选、杨克昌、林祖成等数十人的工作十分突出. 这里值得一提的是：杨路于 1981 年用 Cayley-Menger 行列式得到了不等式 $V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{24R}P^{\frac{2}{3}}$；冷岗松于 1992 年得到了四面体侧面 f_i 上的高 h_i 和面积 S_i 的不等关系，从而获得了侧面三角形内切圆半径 $r_i(i=1,2,3,4)$ 和四面体内切球半径 r 的不等关系，即 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2} \leqslant \frac{2}{r^2}$；孔令恩于 1995 年得到三角

形到四面体的一个变换，把一批三角形不等式推广到四面体.如此等等，这些无不展示了我国数学工作者的风采.笔者也深入地研究了一些问题，撰写并发表了一些论文，提出并解决了一些问题.为了将有关研究成果系统化，促进对四面体不等式问题的深入研究，笔者花费了两年多时间，查阅资料，分门别类，类比推广，探索研究，获得了一系列成果，将这些汇集成册，辑成此书.

本书收录了近30年来我国数学工作者的主要成果和笔者多年来的研究成果.为了使问题充实完整，书中还收录了一些国际数学竞赛问题.书后提出了25个问题供大家研究.本书所列题目凡是出处明确的都给出了署名，题前带“*”的是笔者原创，许多还是第一次发表(有的也许别人早已发现，而笔者却不知晓).本书按不等式中所含几何元素分类，但又不拘泥于分类，有时候依推理的逻辑关系编入所在的类.阅读时按自己的需要，可任意从某一部分开始.由于笔者所掌握的材料有限，有些很好的结果没有收录到，敬请谅解.还由于笔者水平有限，难免有许多疏漏或错误，望读者提出批评意见.

四面体不等式是一个“黄金”矿点，对它的研究才刚刚起步，它的许多秘密有待挖掘、发现、证明.如果本书对大家的学习和研究有所裨益，笔者就很欣慰了.

樊益武
2016年12月
于西安

⊙ 出版说明

若不加特别说明，本书约定：四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，内切球和外接球的半径分别为 r,R，顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的面积为 S_i，侧面 f_i 上的高为 h_i，旁切球半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$，侧面 f_i 与 f_j 所成的内二面角为 θ_{ij}，棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，设侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的重心为 A'_i，记 $m_i=|A_iA'_i|$，则 m_i 叫作侧面 f_i 上的中线 $(i=1,2,3,4)$，表面积 $S=\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，“$\sum$”表示循环和，“$\prod$”表示循环积.

目录

第一章 预备知识

1.1 三角形中的一些重要不等式

记 $\triangle ABC$ 的面积为 Δ，边长分别为 a,b,c，外接圆和内切圆半径分别为 R,r.

1. Weitzenböck 不等式

$$4\sqrt{3}\Delta \leqslant \sum a^2 \tag{1.1}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

2. Polya-Szego 不等式

$$\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}} \tag{1.2}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

3. $$\frac{16}{9}\Delta^2 \sum a^2 \leqslant (abc)^2 \tag{1.3}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

4. Neuberg-Pedoe 不等式

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 和 b_1，b_2,b_3，面积分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqslant 16\Delta_1\Delta_2 \tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$.

5. 高灵不等式

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 和 b_1,b_2,b_3，面积分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

$$\sum a_1(-b_1+b_2+b_3)\geqslant\sqrt{48\Delta_1\Delta_2} \tag{1.5}$$

等号成立当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$.

6. Finsler-Hadwiger 不等式

$$4\sqrt{3}\Delta+\sum(a-b)^2\leqslant\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+3\sum(a-b)^2 \tag{1.6}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

7. Walker 不等式

$$\sum\frac{1}{a^2}\leqslant\frac{1}{4r^2} \tag{1.7}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

8. Neuberg 不等式

$$\sum a^2\leqslant 9R^2 \tag{1.8}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

9. 欧拉(Euler) 不等式

$$2r\leqslant R \tag{1.9}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

1.2 四面体中的一些性质

性质 1.1
$$r=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4} \tag{1.10}$$

性质 1.2
$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r} \tag{1.11}$$

性质 1.3
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r} \tag{1.12}$$

性质 1.4
$$r_1=\frac{3V}{S_2+S_3+S_4-S_1},r_2=\frac{3V}{S_1+S_3+S_4-S_2}$$
$$r_3=\frac{3V}{S_1+S_2+S_4-S_3},\ r_4=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3-S_4} \tag{1.13}$$

性质 1.5
$$r_i=\frac{h_ir}{h_i-2r}\quad(i=1,2,3,4) \tag{1.14}$$

性质 1.6
$$V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4 \tag{1.15}$$

性质 1.7
$$V=\frac{1}{3}Sr \tag{1.16}$$

性质 1.8 设四面体 $ABCD$，记 $BC=a,CA=b,AB=c,DA=a',DB=b'$，$DC=c'$，则

$$R=\frac{1}{24V}\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc')} \tag{1.17}$$

性质 1.9

$$-144V^2=\sum a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)-\sum a^2(b^2+c^2-a^2)a'^2+a^2b^2c^2 \tag{1.18}$$

性质 1.10 若四面体的某一个面的三条边长分别为 a,b,c，它们的对棱分别为 a',b',c'，记

$$P_1=(aa')^2(b^2+c^2+b'^2+c'^2-a^2-a'^2)$$
$$P_2=(bb')^2(c^2+a^2+c'^2+a'^2-b^2-b'^2)$$
$$P_3=(cc')^2(a^2+b^2+a'^2+b'^2-c^2-c'^2)$$
$$Q=(abc)^2+(ab'c')^2+(bc'a')^2+(ca'b')^2$$

则其体积

$$V=\frac{1}{12}(P_1+P_2+P_3-Q)^{\frac{1}{2}} \tag{1.19}$$

性质 1.11 在四面体中，已知过同一顶点的三条棱 a,b,c 两两夹角为 θ_1，θ_2，θ_3，则四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}abc\cdot T(R) \tag{1.20}$$

其中 $T^2(R)=\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 & 1 & \cos\theta_3 \\ \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$.

性质 1.12 若四面体的一组对棱长分别为 a,a'，这组对棱间的距离为 d，对棱所成的角为 θ，则四面体的体积

$$V=\frac{1}{6}aa'd\cdot\sin\theta \tag{1.21}$$

性质 1.13
$$V=\frac{2S_1S_2\sin\theta_{12}}{3A_3A_4}=\frac{2S_1S_3\sin\theta_{13}}{3A_2A_4}=\frac{2S_1S_4\sin\theta_{14}}{3a_{23}}=\frac{2S_2S_3\sin\theta_{23}}{3a_{14}}=\frac{2S_3S_4\sin\theta_{34}}{3a_{12}} \tag{1.22}$$

性质 1.14 已知四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点的空间坐标为 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$，则

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

性质 1.15(射影定理)

$$S_k=\sum_{i\neq k} S_i\cos\theta_{ki}\quad (k=1,2,3,4) \tag{1.24}$$

性质 1.16(余弦定理)

$$\begin{cases} S_1^2=S_2^2+S_3^2+S_4^2-2S_2S_3\cos\theta_{23}-2S_3S_4\cos\theta_{34}-2S_2S_4\cos\theta_{24} \\ S_2^2=S_1^2+S_3^2+S_4^2-2S_1S_3\cos\theta_{13}-2S_3S_4\cos\theta_{34}-2S_4S_1\cos\theta_{14} \\ S_3^2=S_1^2+S_2^2+S_4^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}-2S_2S_4\cos\theta_{24}-2S_1S_4\cos\theta_{14} \\ S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}-2S_2S_3\cos\theta_{23}-2S_3S_1\cos\theta_{13} \end{cases} \tag{1.25}$$

性质 1.17

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\cos\theta_{ij}=\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \tag{1.26}$$

性质 1.18

$$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2=4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} \tag{1.27}$$

性质 1.19　设侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的重心为 A'_i，则 $A_iA'_i(i=1,2,3,4)$ 交于一点 G，G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心，则 $A_iG=3GA'_i(i=1,2,3,4)$.

性质 1.20

$$\begin{aligned} 4GA_1^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2=4GA_2^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{34}^2= \\ 4GA_3^2+a_{12}^2+a_{14}^2+a_{24}^2= \\ 4GA_4^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2=\frac{3}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

性质 1.21

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2=\frac{4}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \tag{1.29}$$

性质 1.22　在四面体 $ABCD$ 中，三组对棱 AB，CD，AC，BD，AD，BC 的长分别为 a，a'，b，b'，c，c'，则该四面体的外接平行六面体三对棱长满足

$$\begin{cases} l_1^2=\frac{1}{4}(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) \\ l_2^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2) \\ l_3^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2) \end{cases} \tag{1.30}$$

1.3 几个常用不等式

1. 算术平均值和几何平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数,则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1.31}$$

等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

2. 柯西不等式

设 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{1.32}$$

等号当且仅当$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

3. 幂平均不等式

设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^r \leqslant \frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \quad (r \geqslant 1 \text{ 或 } r < 0) \tag{1.33}$$

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^r \quad (0 < r < 1) \tag{1.34}$$

等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

4. 排序不等式

若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一排序,则

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_{k_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \tag{1.35}$$

5. 切比雪夫(Chebyshev)不等式

若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \tag{1.36}$$

6. 麦克劳林(Maclaurin)不等式(对称平均值不等式)

设 $a_k > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \left(\frac{a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}a_{i_j}}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\qquad(1.37)$$

四面体中角的不等关系

第二章

2.1 三面角

2.1.1 概念与性质

我们把具有公共端点并且不在同一平面内的 3 条射线 SA，SB，SC，以及相邻两条射线间的平面部分组成的图形，叫作以 S 为顶点的三面角，记作：三面角 $S-ABC$，射线 SA，SB，SC 叫作三面角的棱，相邻两棱间的角叫作三面角的面角，相邻的两个面组成的二面角叫作三面角的二面角. 棱和对面所形成的角叫作三面角的棱面角.

在三面角 $S-ABC$ 中，记 $\angle ASB=\alpha$，$\angle ASC=\beta$，$\angle BSC=\gamma$，它们所对的二面角分别为 θ_α，θ_β，θ_γ，它们所对的棱面角分别为 τ_α，τ_β，τ_γ.

性质 2.1（空间余弦定理）

$$\cos\theta_\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \tag{2.1}$$

证明 如图 2.1，在 SA，SB 上分别取点 E，F，使得 $SE=SF=1$，作 $EH\perp SC$ 于点 H，$FG\perp SC$ 于点 G，则 EH 与 FG 所成的角为 θ_α，且 $SH=\cos\beta$，$EH=\sin\beta$，$SG=\cos\gamma$，$FG=\sin\gamma$，$HG=|SG-SH|=|\cos\gamma-\cos\beta|$.

由异面直线上两点间距离公式，有

$$EF^2 = EH^2 + FG^2 + HG^2 - 2EH \cdot FG \cdot \cos\theta_\alpha =$$
$$2 - 2\cos\beta\cos\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\theta_\alpha$$

又在 $\triangle SEF$ 中，$EF^2 = SE^2 + SF^2 - 2SE \cdot SF\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$.

由此两式可得式(2.1)．证毕.

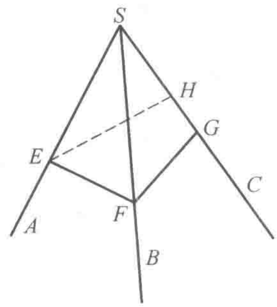


图 2.1

性质 2.2

$$P(S) = \sin^2\alpha\sin^2\tau_\alpha = \sin^2\beta\sin^2\tau_\beta = \sin^2\gamma\sin^2\tau_\gamma \tag{2.2}$$

（其中 $P(S) = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 叫作三面角的特征值）.

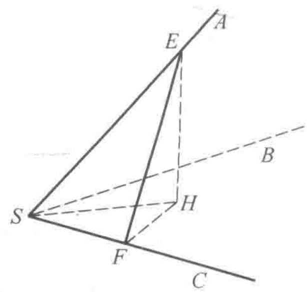


图 2.2

证明　如图 2.2，作 $EH \perp$ 平面 BSC 于点 H，$HF \perp SC$ 于点 F，联结 EF，则

$$\angle EFH = \theta_\alpha, \angle ESH = \tau_\gamma, \angle ESF = \beta$$

由于 $\sin\tau_\gamma = \dfrac{EH}{SE}, \sin\theta_\alpha = \dfrac{EH}{EF}, \sin\beta = \dfrac{EF}{SE}$，所以

$\sin\tau_\gamma = \dfrac{EH}{SE} = \dfrac{EH}{EF} \cdot \dfrac{EF}{SE} = \sin\theta_\alpha\sin\beta$. 于是

$$\sin^2\tau_\gamma\sin^2\gamma = \sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\theta_\alpha =$$
$$\sin^2\beta\sin^2\gamma(1 - \cos^2\theta_\alpha) =$$
$$\sin^2\beta\sin^2\gamma\left[1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2\right] =$$
$$P(S)$$

由 $P(S)$ 关于 α, β, γ 的对称性，有

$$\sin^2\alpha\sin^2\tau_\alpha = \sin^2\beta\sin^2\tau_\beta = \sin^2\gamma\sin^2\tau_\gamma = P(S)$$

证毕.

2.1.2　应用

1. 若 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$，且 $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$，则以 α, β, γ 为面角构成一个三面角的充要条件是

$$\alpha + \beta > \gamma, \beta + \gamma > \alpha, \gamma + \alpha > \beta \tag{2.3}$$

证明　充分性显然. 以下证明必要性.

在三面角 $S-ABC$ 中，$\angle ASB = \alpha, \angle ASC = \beta, \angle BSC = \gamma$，则 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. 在 SA 上取 $SP = 1$，过点 P 作垂面与 SB，SC 分别交于点 Q，H，联结 PQ，PH，QH. 令 $\angle QPH = \varphi$，则 $PQ = \tan\alpha, PH = \tan\beta, SQ = \sec\alpha, SH = \sec\beta$，于是

$$QH^2 = \tan^2\alpha + \tan^2\beta - 2\tan\alpha\tan\beta\cos\varphi$$

$$QH^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma$$

两式相减，整理得

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi \tag{2.4}$$

因为 $\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0, -1 < \cos\varphi < 1$，从而有

$$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta) \tag{2.5}$$

不妨设 $\alpha \geqslant \beta$，则 $0 \leqslant \alpha-\beta < \pi$. 当 $\alpha+\beta \geqslant \pi$ 时，$\gamma, \alpha-\beta \in [0,\pi)$，且 $\cos\gamma < \cos(\alpha-\beta)$，所以 $\gamma > \alpha-\beta$，故 $\alpha-\beta < \gamma < \alpha+\beta$.

当 $0 < \alpha+\beta < \pi$ 时，$\gamma, \alpha-\beta, \alpha+\beta \in [0,\pi)$，由式(2.3)可得 $\alpha-\beta < \gamma < \alpha+\beta$. 于是有 $\alpha+\beta > \gamma, \beta+\gamma > \alpha$. 同理可证 $\alpha+\gamma > \beta$. 证毕.

2. 若 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$，且 $\alpha+\beta+\gamma < 2\pi$，则以 α, β, γ 为面角构成一个三面角的充要条件是

$$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta) \tag{2.6}$$
$$\cos(\alpha+\gamma) < \cos\beta < \cos(\alpha-\gamma)$$
$$\cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta-\gamma)$$

证明　必要性. 由式(2.4)有

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$$

因为　$-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1, \sin\alpha, \sin\beta > 0$

所以　$\cos\gamma \leqslant \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$

且　$\cos\gamma \geqslant \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$

所以　$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta)$

同理

$$\cos(\alpha+\gamma) < \cos\beta < \cos(\alpha-\gamma)$$
$$\cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta-\gamma)$$

充分性. 由式(2.3)必要性的证明可知

$$\alpha-\beta < \gamma < \alpha+\beta$$
$$\alpha-\gamma < \beta < \alpha+\gamma$$

由此得 $\alpha+\beta > \gamma, \beta+\gamma > \alpha, \gamma+\alpha > \beta$，再由式(2.3)的充分性结论成立. 证毕.

3. $$\pi < \theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma < 3\pi \tag{2.7}$$

证明　如图 2.3，设 P 为三面角 $S\text{-}ABC$ 内任意一点，$PE \perp$ 面 SAB，$PF \perp$ 面 SBC，$PD \perp$ 面 SAC，作 $EG \perp SA$，$DG \perp SA$ 等，则

$$\theta_\alpha = \angle DKF, \theta_\beta = \angle EGD, \theta_\gamma = \angle EHF$$

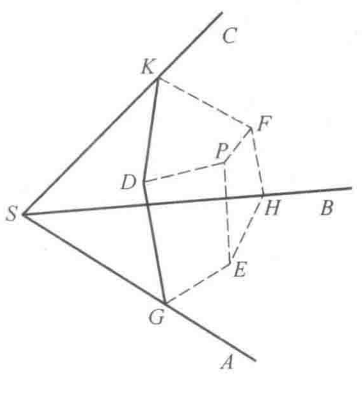


图 2.3

由平面四边形内角和定理有

$$\theta_\alpha + \angle DPF = \pi, \theta_\beta + \angle DPE = \pi$$

$$\theta_\gamma + \angle EPF = \pi$$

于是 $$\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma = 3\pi - (\angle DPF + \angle DPE + \angle EPF)$$

因为 $P-DEF$ 是三面角，所以

$$0 < \angle DPF + \angle DPE + \angle EPF < 2\pi$$

代入上式即可得式(2.7). 证毕.

4.(陶兴模) 设一个三面角的三个面角分别为 α,β,γ，则

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} > \sin\frac{\gamma}{2} \tag{2.8}$$

证明 在三面角 $S-ABC$ 中，不妨设 $SA=SB=SC=1$，$\angle ASB=\alpha$，$\angle ASC=\beta$，$\angle BSC=\gamma$，由余弦定理得 $AB=2\sin\frac{\alpha}{2}$，$BC=2\sin\frac{\beta}{2}$，$AC=2\sin\frac{\gamma}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB+BC>AC$ 得

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} > \sin\frac{\gamma}{2}$$

证毕.

5.(陶兴模) 设一个三面角的三个面角分别为 α,β,γ，则

$$\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma \tag{2.9}$$

证明 根据三面角的性质知 $\gamma<\alpha+\beta<2\pi$，$0\leqslant|\alpha-\beta|<\gamma$，所以 $\frac{\gamma}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$.

(1) 当 $0<\alpha+\beta\leqslant\pi$ 时，$0<\frac{\gamma}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>\sin\frac{\gamma}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|>\cos\frac{\gamma}{2}>0$，由此得

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}，即 \sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$$

(2) 当 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$ 时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$，下面证明 $\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\gamma}{2}$. 否则 $\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{\gamma}{2}$，则 $\alpha+\beta+\gamma\geqslant2\pi$(矛盾)，且 $\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\gamma}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 所以

$$\sin\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\sin\frac{\gamma}{2}>0，即 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}>\sin\frac{\gamma}{2}>0$$

又因为 $0\leqslant\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|>\cos\frac{\gamma}{2}>0$，即 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\cos\frac{\gamma}{2}>0$.

于是，得 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$，即 $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$.

综合(1)(2),命题得证.

6.(陶兴模)设一个三面角的三个面角 α,β,γ 所对的三个二面角为 $\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma$,则

$$\sin\theta_\alpha+\sin\theta_\beta>\sin\theta_\gamma \tag{2.10}$$

证明　由空间余弦定理得

$$\cos\theta_\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\sin^2\theta_\alpha=1-\cos^2\theta_\alpha=1-\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2=$$

$$\frac{(\sin\beta\sin\gamma)^2-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}=$$

$$\frac{(\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)(\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}=$$

$$\frac{[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha][\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)]}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}=$$

$$\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{(\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

所以 $\sin\theta_\alpha=\dfrac{2\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}}{\sin\beta\sin\gamma}$.

令 $2\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}=k$,则 $\sin\theta_\alpha=\dfrac{k}{\sin\beta\sin\gamma}$. 由于 k 关于 α,β,γ 是对称的,同理可得

$$\sin\theta_\beta=\frac{k}{\sin\alpha\sin\gamma},\sin\theta_\gamma=\frac{k}{\sin\alpha\sin\beta}$$

由式(2.9)知 $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$,在不等式两边同乘以 $\dfrac{k}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$,得

$$\frac{k}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{k}{\sin\alpha\sin\gamma}>\frac{k}{\sin\alpha\sin\beta},\text{即 }\sin\theta_\alpha+\sin\theta_\beta>\sin\theta_\gamma$$

7*. 设一个三面角的三个面角 α,β,γ 所对的三个棱面角为 $\tau_\alpha,\tau_\beta,\tau_\gamma$,则

$$\frac{1}{\sin\tau_\alpha}+\frac{1}{\sin\tau_\beta}>\frac{1}{\sin\tau_\gamma} \tag{2.11}$$

证明　由式(2.2),有

$$\frac{1}{\sin\tau_\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{P(S)}},\frac{1}{\sin\tau_\beta}=\frac{\sin\beta}{\sqrt{P(S)}},\frac{1}{\sin\tau_\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sqrt{P(S)}}$$

由式(2.9),有 $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$.

故有 $\dfrac{1}{\sin\tau_\alpha}+\dfrac{1}{\sin\tau_\beta}>\dfrac{1}{\sin\tau_\gamma}$. 证毕.

8*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$,其内的一条射线 SP 与三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$,则

$$\sin\varphi_\alpha+\sin\varphi_\beta+\sin\varphi_\gamma\leqslant 1 \tag{2.12}$$

当且仅当 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta=\varphi_\gamma$ 时取等号.

证明 建立如图 2.4 所示的直角坐标系,构造正四面体 $A_1A_2A_3A_4$. 设 $A_1(0,0,1)$, $A_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$, $A_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{6}}{4},0\right)$, $A_4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{6}}{4},0\right)$. 点 P 为 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点,其直角坐标为 (x,y,z). 点 P 的重心规范坐标为 $(a:b:c:d)$ 且 $\sum a=1$.

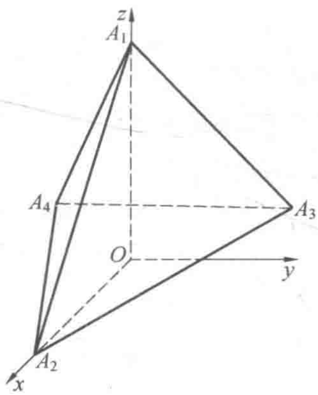


图 2.4

因为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且高为 1,P 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部,所以 $a,b,c,d>0$,且 a,b,c,d 分别为点 P 到侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的距离,则有

$$x=\frac{\sqrt{2}}{4}(2b-c-d),\ y=\frac{\sqrt{6}}{4}(c-d),\ z=a$$

于是 $$A_1P=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8(a-1)^2}$$

不妨设 $a=0$,则

$$\sin\varphi_\alpha+\sin\varphi_\beta+\sin\varphi_\gamma=\frac{b+c+d}{|A_1P|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8}}\leqslant 1$$

当且仅当 $b=c=d=\dfrac{1}{3}$,即 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta=\varphi_\gamma$ 时取等号. 证毕.

9*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$,其内的一条射线 SP 与

三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$,则

$$\sin^2\varphi_\alpha+\sin^2\varphi_\beta+\sin^2\varphi_\gamma\geqslant\frac{1}{3} \tag{2.13}$$

当且仅当 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta=\varphi_\gamma$ 时取等号.

证明 如图 2.4 所示. 由式(2.12) 的证明可知

$$f=\sin^2\varphi_\alpha+\sin^2\varphi_\beta+\sin^2\varphi_\gamma=\frac{b^2+c^2+d^2}{A_1P^2}=\frac{8(b^2+c^2+d^2)}{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8}$$

(用拉格朗日(Lagrange) 乘子法) 考虑:$F=f+\lambda(b+c+d-1)$,其中 $b,c,d\geqslant 0,b+c+d=1$. 于是

$$\begin{cases}F'_b=\dfrac{16b}{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8}-\dfrac{32(b^2+c^2+d^2)(2b-c-d)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}+\lambda=0\\ F'_c=\dfrac{16c}{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8}-\dfrac{32(b^2+c^2+d^2)(-b+2c-d)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}+\lambda=0\\ F'_d=\dfrac{16d}{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8}-\dfrac{32(b^2+c^2+d^2)(-b-c+2d)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}+\lambda=0\\ b+c+d=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}F'_b-F'_c=-\dfrac{2(b-c)(b+c+d+2)(b+c+d-2)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}=\\ \qquad\dfrac{6(b-c)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}=0\\ F'_d-F'_c=-\dfrac{2(c-d)(b+c+d+2)(b+c+d-2)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}=\\ \qquad\dfrac{6(c-d)}{[(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8]^2}=0\end{cases}$$

注意到 $b+c+d=1$. 从而得唯一驻点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,且 $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. 在边界上,不妨设 $b=0$ 时,$c+d=1$,$f=\dfrac{8(c^2+d^2)}{(c+d)^2+3(c-d)^2+8}>\dfrac{4(c+d)^2}{4(c+d)^2+8}=\dfrac{1}{3}$. 所以 $f_{\min}=\frac{1}{3}$. 故 $f\geqslant\frac{1}{3}$. 证毕.

由此可得式(2.14).

10^*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$,其内的一条射线 SP 与三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$,则

$$\cos^2\varphi_\alpha+\cos^2\varphi_\beta+\cos^2\varphi_\gamma\leqslant\frac{8}{3} \tag{2.14}$$

11^*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$,其内任意一条射线 SP 与三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$,$SP$ 与三条棱 SA,SB,SC 所夹的角为 φ_A,φ_B,

φ_C，则

$$\cos\varphi_A+\cos\varphi_B+\cos\varphi_C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\varphi_\alpha+\cos\varphi_\beta+\cos\varphi_\gamma)\leqslant\sqrt{6}\tag{2.15}$$

证明 如图 2.5 所示，作 $PH\perp$ 平面 SBC 于点 H.

根据立体几何中的三面角公式，有

$$\cos\varphi_B=\cos\angle HSE\cos\varphi_\gamma$$
$$\cos\varphi_C=\cos\angle HSF\cos\varphi_\gamma$$

所以 $\cos\varphi_B+\cos\varphi_C=\cos\varphi_\gamma(\cos\angle HSE+\cos\angle HSF)=$

$$2\cos\varphi_\gamma\cos\frac{\angle HSE+\angle HSF}{2}\cos\frac{\angle HSE-\angle HSF}{2}\leqslant$$

$$2\cos\varphi_\gamma\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cos\varphi_\gamma$$

同理 $\cos\varphi_A+\cos\varphi_B\leqslant\sqrt{3}\cos\varphi_\alpha$，$\cos\varphi_A+\cos\varphi_C\leqslant\sqrt{3}\cos\varphi_\beta$

以上三式相加得

$$\cos\varphi_A+\cos\varphi_B+\cos\varphi_C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\varphi_\alpha+\cos\varphi_\beta+\cos\varphi_\gamma)$$

另外 $\cos\varphi_\alpha+\cos\varphi_\beta+\cos\varphi_\gamma\leqslant\sqrt{3(\cos^2\varphi_\alpha+\cos^2\varphi_\beta+\cos^2\varphi_\gamma)}\leqslant2\sqrt{2}$. 证毕.

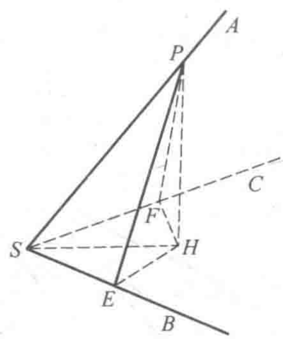


图 2.5

12*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$，其内任意一条射线 SP 与三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$，$SP$ 与三条棱 SA,SB,SC 所夹的角为 φ_A，φ_B,φ_C，则

$$\cos^2\varphi_A+\cos^2\varphi_B+\cos^2\varphi_C\leqslant\frac{3}{4}(\cos^2\varphi_\alpha+\cos^2\varphi_\beta+\cos^2\varphi_\gamma)\leqslant2\tag{2.16}$$

证明 如图 2.5 所示，根据立体几何中的三面角公式，有

$$\cos\varphi_B=\cos\angle HSE\cos\varphi_\gamma$$

$$\cos\varphi_C=\cos\angle HSF\cos\varphi_\gamma$$

所以 $\cos^2\varphi_B+\cos^2\varphi_C=\cos^2\varphi_\gamma(\cos^2\angle HSE+\cos^2\angle HSF)=$

$$\frac{1}{2}\cos^2\varphi_\gamma(2+\cos 2\angle HSE+\cos 2\angle HSF)=$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\varphi_\gamma[2+2\cos(\angle HSE+\angle HSF)\cdot$$

$$\cos(\angle HSE-\angle HSF)]\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\varphi_\gamma(2+2\cos\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\cos^2\varphi_\gamma$$

同理 $\cos^2\varphi_A+\cos^2\varphi_B\leqslant\frac{3}{2}\cos^2\varphi_\alpha,\cos^2\varphi_A+\cos^2\varphi_C\leqslant\frac{3}{2}\cos^2\varphi_\beta$

以上三式相加变形可得

$$\cos^2\varphi_A+\cos^2\varphi_B+\cos^2\varphi_C\leqslant\frac{3}{4}(\cos^2\varphi_\alpha+\cos^2\varphi_\beta+\cos^2\varphi_\gamma)\leqslant 2$$

由此易得：

13*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$，其内任意一条射线 SP 与三条棱 SA,SB,SC 所夹的角为 $\varphi_A,\varphi_B,\varphi_C$，则

$$\sin^2\varphi_A+\sin^2\varphi_B+\sin^2\varphi_C\geqslant 1 \tag{2.17}$$

14*. 设三面角 $S-ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$，其内任意一条射线 SP 与三个面所成的角为 $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$，$SP$ 与三条棱 SA,SB,SC 所夹的角为 φ_A,φ_B，φ_C，则

$$\sin\varphi_\alpha+\sin\varphi_\beta+\sin\varphi_\gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(\sin\varphi_A+\sin\varphi_B+\sin\varphi_C) \tag{2.18}$$

证明 如图 2.6 所示，作 $PE\perp$ 平面 ASC，$PF\perp$ 平面 ASB，$PH\perp SA$，则 $\angle PSA=\varphi_A$，$\angle PSE=\varphi_\gamma$，$\angle PSF=\varphi_\alpha$. 于是

$$\sin\varphi_\gamma=\sin\varphi_A\sin\angle PHE$$

$$\sin\varphi_\alpha=\sin\varphi_A\sin\angle PHF$$

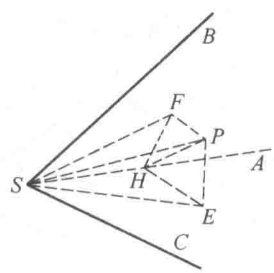


图 2.6

所以

$$\sin\varphi_\gamma+\sin\varphi_\alpha=\sin\varphi_A(\sin\angle PHE+\sin\angle PHF)=$$

$$2\sin\varphi_A\sin\frac{\angle PHE+\angle PHF}{2}\cdot$$

$$\cos\frac{\angle PHE-\angle PHF}{2}\leqslant$$

$$2\sin\varphi_A\sin\frac{\angle EHF}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\varphi_A$$

同理 $\sin\varphi_\alpha+\sin\varphi_\beta\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\varphi_B$，$\sin\varphi_\beta+\sin\varphi_\gamma\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\varphi_C$.

将三式相加可得

$$\sin\varphi_\alpha+\sin\varphi_\beta+\sin\varphi_\gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(\sin\varphi_A+\sin\varphi_B+\sin\varphi_C)$$

证毕.

猜想：1*. $\sin\varphi_A+\sin\varphi_B+\sin\varphi_C\geqslant\sqrt{3}$.

2. $\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C\geqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2 四面体的内二面角及四面体内一点对四面体的棱所张的角

1*. 四面体的六个内二面角之和大于 2π.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的以 A_iA_j 为棱的二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，由式(2.7)知对三面角 $A_1-A_2A_3A_4$ 有，$\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}>\pi$，再将此结论运用于其余三个三面角，相加得

$$2(\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}+\theta_{23}+\theta_{24}+\theta_{34})>4\pi$$

故

$$\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}+\theta_{23}+\theta_{24}+\theta_{34}>2\pi \tag{2.19}$$

证毕.

2.(1980 年奥地利一波兰)对于四面体内部的任意一点，该点对各棱的张角之和大于 3π.

证明 设点 O 在四面体 $ABCD$ 的内部，用 P 表示直线 DO 与平面 ABC 的交点，Q 表示直线 BP 与边 AC 的交点，由三面角性质，有

$$\begin{aligned}\angle AOB+\angle AOC&=\angle AOB+\angle AOQ+\angle QOC>\angle BOQ+\angle QOC=\\&\angle BOP+\angle POQ+\angle QOC>\angle BOP+\angle POC=\\&\pi-\angle BOD+\pi-\angle COD\end{aligned}$$

从而

$$\angle AOB+\angle AOC+\angle BOD+\angle COD>2\pi$$

同理

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle AOD+\angle COD>2\pi$$

$$\angle AOC+\angle BOC+\angle AOD+\angle BOD>2\pi$$

将上述三个不等式相加后除以 2，即得要证的结论. 证毕.

3*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，以 f_i,f_j 为面的二面角为

$\theta_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则

$$2\pi < \theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{14} + \theta_{23} + \theta_{24} + \theta_{34} < 3\pi \tag{2.20}$$

证明　这里仅证右边不等式. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部一点，过点 O 向各侧面 f_i 作垂线，垂足分别为 $B_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，记 $\alpha_{ij} = \angle B_iOB_j(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则 $\theta_{ij} = \pi - \alpha_{ij}$，并且可以证明 O 为垂足四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 内一点，于是

$$\theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{14} + \theta_{23} + \theta_{24} + \theta_{34} =$$

$$6\pi - (\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{34}) < 6\pi - 3\pi = 3\pi$$

4*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部任意一点，记 $\alpha_{ij} = \angle A_iOA_j(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则

$$3\pi < \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{34} < 4\pi \tag{2.21}$$

证明　过顶点 A_i 作平面垂直于 $OA_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，这四个平面围成四面体 $A'_1A'_2A'_3A'_4$，设其内二面角为 $\theta_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则 $\alpha_{ij} = \pi - \theta_{ij}$，由不等式(2.20)可得不等式(2.21). 证毕.

5.（1982年苏联）在四面体内部任取一点 M，证明：点 M 对四面体各棱张角的余弦必有一个不小于 $-\frac{1}{3}$.

证明　假设点 M 关于四面体 $ABCD$ 的各棱的张角的余弦都大于 $-\frac{1}{3}$. 如果让顶点 A,B,C,D 分别沿射线 MA,MB,MC,MD 移动，易知射线间的夹角并不改变. 因此，不妨设四面体各顶点到 M 的距离都相等且等于1，并可设面 ABC 是距点 M 最近的侧面，且 AD 是棱 AD,BD,CD 中最长的. 过点 M 引直线垂直于面 ABC，并在直线上取点 D_1，使得 $MD_1 = 1$ 且射线 MD_1 与面 ABC 不相交(图2.7). 下面证明 $AD_1 \leqslant AD$.

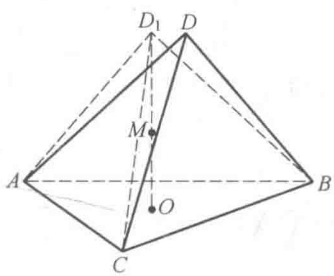


图 2.7

如果 $AD_1 > AD$，则 $AD_1 > BD$，$AD_1 > CD$. 因为 $MA = MB = MC$，所以这三条线段在平面 ABC 上的投影相等. 于是有 $AD_1 = BD_1 = CD_1$，$BD_1 > BD$，$CD_1 > CD$. 过线段 DD_1 的中点作垂直 DD_1 的平面 π. 因为 $MD = MD_1$，所以 M 在平面 π 上.

又因为 $AD_1 > AD$，所以点 A 与 D 在平面 π 的同侧. 又因为 $BD_1 > BD$，$CD_1 > CD$，所以点 A,B,C,D 都在平面 π 的同侧，从而 M 不在平面 π 上，矛盾. 这表明，$AD_1 \leqslant AD$. 于是

$$\cos\angle AMD_1 \geqslant \cos\angle AMD > -\frac{1}{3} \tag{2.22}$$

因为 $AD_1 = BD_1 = CD_1$，所以 M 关于四面体 $ABCD_1$ 的各棱的张角的余弦

都大于 $-\frac{1}{3}$. 因为面 ABC 是四面体 $ABCD$ 中距点 M 最近的侧面，所以过点 M 引平面 ABC 的垂线 MO，线段 MO 不交其余侧面. 例如，如果 MO 穿过侧面 BCD 后到达面 ABC，那么点 M 到面 BCD 的距离比到面 ABC 的距离小，矛盾. 因此，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且它位于这个三角形内，这表明，$\triangle ABC$ 是锐角三角形. 记 $\angle AMD_1=\alpha$，则有

$$-\frac{1}{3}<\cos\alpha<0$$

因此
$$\sin\alpha>\sqrt{\frac{8}{9}}$$

因为 AO 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，所以

$$AO=MA\cdot\sin\angle AMO=1\cdot\sin\angle AMD_1=\sin\alpha$$

设 AB 是 $\triangle ABC$ 中最长的边，则 $60^\circ<\angle ACB<90^\circ$，再由正弦定理得

$$AB=2\sin\alpha\cdot\sin\angle ACB>2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$$

另外，因为

$$\cos\angle AMB>-\frac{1}{3}$$

所以由余弦定理，得

$$AB^2=2-2\cos\angle AMB<2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

这与前面的 $AB>\sqrt{\frac{8}{3}}$ 矛盾. 证毕.

6*. 设 M 是四面体 $ABCD$ 内任一点，则三面角 $A-BCD$ 各面角之和不大于三面角 $M-BCD$ 各面角之和.

证明 若点 M 在棱上，例如点 M 在棱 AB 上(图 2.8)，作 $ME\parallel AD$ 交 BD 于点 E，作 $MF\parallel AC$ 交 BC 于点 F，在 CD 上任取一点 G，联结 GM,GE,GF. 由三面角的性质有

$$\begin{aligned}\angle CMD+\angle BMC+\angle BMD=&(\angle EMB+\angle DMG)+(\angle EMB+\angle DMG)+\\&\angle BME+\angle BMF>\\&\angle EMG+\angle FMG+\angle BME+\angle BMF>\\&\angle EMF+\angle BME+\angle BMF=\\&\angle CAD+\angle BAC+\angle BAD\end{aligned}$$

当点 M 在四面体内或侧面上时(图 2.9)，延长 CM 交面 ABD 于点 E，联结 DE 并延长交 AB 于点 F，联结 BE,CF，由上述结论，得

$$\angle BMC+\angle BMD+\angle CMD>\angle BEC+\angle BED+\angle CED>$$

$$\angle BFC + \angle BFD + \angle CFD > \angle BAC + \angle BAD + \angle CAD$$

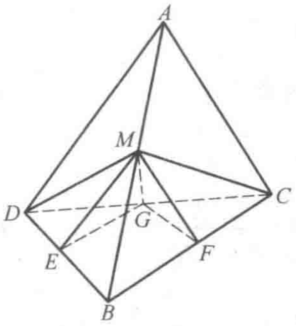


图 2.8

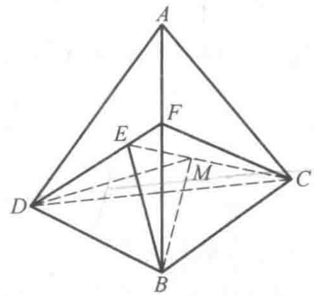


图 2.9

7*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<0 \tag{2.23}$$

证明 取单位向量 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\overrightarrow{OA_i}}{|\overrightarrow{OA_i}|}(i=1,2,3,4)$,设由向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$ 的终点构成的四面体为 $B_1B_2B_3B_4$,因为 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,所以 $\boldsymbol{e}_1$ 的相反向量 $-\boldsymbol{e}_1$ 与平面 $B_2B_3B_4$ 的交点在 $\triangle B_2B_3B_4$ 内,并记其为 P,考虑

$$Q=-\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|\cos\theta$$

(其中 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$ 为通过 $\triangle B_2B_3B_4$ 的重心的常向量,$\theta=\langle-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{u}\rangle$).

不难看出,当 θ 最大时,Q 最小. 因为点 P 在 $\triangle B_2B_3B_4$ 内,所以当 $-\boldsymbol{e}_1$ 为 $\boldsymbol{e}_2$ 或 $\boldsymbol{e}_3$ 或 $\boldsymbol{e}_4$ 时,θ 最大. 不妨设 $-\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$,则

$$Q=-\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=1+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4>\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4$$

注意到 $\cos\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,故有 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<0$. 证毕.

8*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}>0 \tag{2.24}$$

证明 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任取一点 P,过 P 向四面体的侧面分别作垂线,垂足分别为 B_1,B_2,B_3,B_4,易知 A_1 与 P 在平面 $B_2B_3B_4$ 的异侧等,所以 P 在四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 内,记 $\angle B_iPB_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则 $\theta_{ij}=\pi-\alpha_{ij}$,代入式(2.23),即可得式(2.24). 证毕.

9*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}<3 \tag{2.25}$$

证明 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{2}(1+\cos\alpha_{ij})=3+\frac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<3.$ 证毕.

10*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}>3 \tag{2.26}$$

证明 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{2}(1+\cos\theta_{ij})=3+\frac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}>3.$

下面给出不等式(2.23)的一个应用.

11*. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,外接球球心在四面体内部,外接球半径为 R,则

$$12R^2<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2 \tag{2.27}$$

证明 设 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,在 $\triangle A_iOA_j$ 中,把 $\cos\alpha_{ij}=\frac{2R^2-a_{ij}^2}{2R^2}$ 代入式(2.23)整理即得式(2.27).证毕.

由式(2.27),(4.7),有:

12. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,外接球球心在其内部,外接球半径为 R,则

$$12R^2<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant 16R^2 \tag{2.28}$$

13*. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,外接球球心 O 在其内部,外接球半径为 R,则

$$6R<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\leqslant 4\sqrt{6}R \tag{2.29}$$

证明 设 $\overrightarrow{OA_i}=R\boldsymbol{e}_i$(其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为单位向量,$i=1,2,3,4$),则 $a_{ij}=|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}|$,因为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于球 O,所以 $2R\geqslant a_{ij}$,于是 $2Ra_{ij}=2R|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}|\geqslant(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j})^2$.注意到 $\cos\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$.对上式求和,得

$$2R\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}=2R\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}|\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j})^2=$$
$$12R^2-2R^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}$$

因为点 O 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内,由式(2.23)知 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<0$,所以

$$2R\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}>12R^2$$

即

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}>6R$$

又由式(4.7)及幂平均不等式,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} \leqslant \left(6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (6\cdot 16R^2)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}R$$

证毕.

14. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则对于任意实数 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ 成立不等式

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j\cos\theta_{ij} \tag{2.30}$$

当且仅当 x_i 与 S_i 成比例时等号成立.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 各侧面的单位法向量分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$，则有 $\langle\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j\rangle=\pi-\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，考虑

$$\begin{aligned}|x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4|^2 &= \sum_{i=1}^{4}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j(\boldsymbol{\varepsilon}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\\ &\sum_{i=1}^{4}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\cos\langle\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j\rangle=\\ &\sum_{i=1}^{4}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\cos\theta_{ij}\geqslant 0\end{aligned}$$

由式(1.26)知，当 x_i 与 S_i 成比例时等号成立.

顺便指出：在此我们实际上证明了：

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 f_i 向外的单位法向量，S_i 是 $f_i\,(i=1,2,3,4)$ 的面积，则

$$S_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+S_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+S_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+S_4\boldsymbol{\varepsilon}_4=\mathbf{0}$$

在式(2.30)中，令 $x_i=1\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，结合不等式(2.24)，得：

15. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$0<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}\leqslant 2 \tag{2.31}$$

若诸 θ_{ij} 均为锐角，利用算术 — 几何平均值不等式，可得：

16. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 均为锐角，则

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}\leqslant\frac{1}{3^6} \tag{2.32}$$

由三角公式 $\cos\theta_{ij}=2\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}-1$，代入式(2.31)，可得：

17. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$3<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}\leqslant 4 \tag{2.33}$$

由三角公式 $\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}=1-\sin^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，代入式(2.33)，可得：

18. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$2\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2}<3\tag{2.34}$$

19.（马统一）设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则对于任意非零实数 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ 成立不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_i^2x_j^2\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)^2\tag{2.35}$$

其中等号当且仅当 $\dfrac{S_iS_j}{x_i^2x_j^2\cos\theta_{ij}}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 均相等时成立.

证明 由四面体射影定理和柯西不等式，得

$$S_i^2=\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{4}S_j\cos\theta_{ij}\right)^2\leqslant\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{4}x_i^2x_j^2\cos^2\theta_{ij}\right)\left(\sum_{j=1,j\neq i}\frac{S_j^2}{x_i^2x_j^2}\right)$$

即

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{4}x_i^2x_j^2\cos^2\theta_{ij}\geqslant\frac{S_i^2}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4}\dfrac{S_j^2}{x_i^2x_j^2}}=\frac{\dfrac{S_i^2}{x_i^2}}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4}\dfrac{S_j^2}{x_j^2}}x_i^4$$

其中 $i=1,2,3,4$. 等号当且仅当所有 $\dfrac{S_i}{x_i^2\cos\theta_{ij}}$ 均相等时成立. 记 $p=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{S_i^2}{x_i^2}$，将上述 4 个不等式左右两边分别相加后，再应用柯西不等式，得

$$\begin{aligned}2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}^{4}x_i^2x_j^2\cos^2\theta_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{4}\frac{\dfrac{S_i^2}{x_i^2}}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4}\dfrac{S_j^2}{x_j^2}}x_i^4&=\sum_{i=1}^{4}\frac{\left(\dfrac{S_i^2}{x_i^2}-p\right)+p}{p-\dfrac{S_i^2}{x_i^2}}x_i^4=\\&p\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^4}{p-\dfrac{S_i^2}{x_i^2}}-\sum_{i=1}^{4}x_i^4=\\&\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\left(p-\frac{S_i^2}{x_i^2}\right)\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^4}{p-\dfrac{S_i^2}{x_i^2}}-\sum_{i=1}^{4}x_i^4\geqslant\\&\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^4\end{aligned}\tag{2.36}$$

将 $\cos^2\theta_{ij}=1-\sin^2\theta_{ij}$ 分别代入上式，整理，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_i^2x_j^2\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)^2$$

式(2.36)中，第一个不等式等号成立的条件如前所述，第二个不等式等号成立当且仅当所有 $\dfrac{1}{x_i^2}\left(p-\dfrac{S_i^2}{x_i^2}\right)\,(i=1,2,3,4)$ 均相等. 因此式(2.35)等号成立

的充要条件是所有$\dfrac{S_iS_j}{x_i^2x_j^2\cos\theta_{ij}}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$均相等.证毕.

20. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则对于任意非零实数 $x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 成立不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j\sin\theta_{ij}\leqslant\sqrt{2}\sum_{i=1}^{4}x_i^2 \tag{2.37}$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$,且四面体为正四面体时取等号.

证明 由幂平均不等式,有

$$\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j\sin\theta_{ij}\Big)^2\leqslant 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_i^2x_j^2\sin^2\theta_{ij}$$

代入式(2.35),即可得式(2.37).

在式(2.35)中,令 $x_1=\cdots=x_4=1$,则可得:

21. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{16}{3} \tag{2.38}$$

在式(2.37)中,令 $x_1=\cdots=x_4=1$,则可得:

22. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}\leqslant 4\sqrt{2} \tag{2.39}$$

23. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}\leqslant\frac{2^9}{3^6} \tag{2.40}$$

24*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\tan^2\frac{\theta_{ij}}{2}\geqslant 3 \tag{2.41}$$

证明 易知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在$(-1,1)$上为凸函数且为减函数,于是

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\tan^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1-\cos\theta_{ij}}{1+\cos\theta_{ij}}\geqslant 6\cdot\frac{1-\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}}{1+\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}}\geqslant$$

$$6\cdot\frac{1-\dfrac{1}{6}\cdot 2}{1+\dfrac{1}{6}\cdot 2}=3$$

证毕.

25. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j \sin\alpha_{ij} \leqslant \sqrt{2}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \tag{2.42}$$

证明 过顶点 A_i 作平面垂直于 $OA_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，这四个平面围成四面体 $A'_1A'_2A'_3A'_4$，设其内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则 $\theta_{ij}=\pi-\alpha_{ij}$，代入不等式(2.37)即可得不等式(2.42).

利用不等式(2.42)可部分的证明陈计在1993年提出的一个猜想：

26*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部任意一点，O 到棱 A_iA_j 的距离为 $r_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，$|OA_i|=R_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，若 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}\geqslant\frac{\pi}{2}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4} R_i > \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij} \tag{2.43}$$

证明 设 l_{ij} 是 $\triangle A_iOA_j$ 内的 $\angle A_iOA_j$ 的平分线长，则 $l_{ij}\leqslant\sqrt{R_iR_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}$，由 $\alpha_{ij}\geqslant\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\frac{\alpha_{ij}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\alpha_{ij}=2\sin\frac{\alpha_{ij}}{2}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}\geqslant\sqrt{2}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}$，令 $x_i=\sqrt{R_i}\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，代入式(2.35)得 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sqrt{R_i}\sqrt{R_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}<\sum\limits_{i=1}^{4}R_i$，故 $\sum\limits_{i=1}^{4}R_i>\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}l_{ij}$，注意到 $r_{ij}\leqslant l_{ij}$，因此

$$\sum_{i=1}^{4} R_i > \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij}$$

证毕.

2.3 四面体的顶点角

2.3.1 概念与定理

1968年，P. Bartoš 提出关于 n 维单形顶点角的概念：设 Ω 是 E^n 中的 n 维单形，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{n+1}$ 依次是 Ω 的 $n+1$ 个界面上的单位法向量，令

$$D_i=\det(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{n+1}) \tag{2.44}$$

则把 $\alpha_i=\arcsin|D_i|$ 定义为此单形的第 i 个界面所对的顶点角.

从这个定义出发，Bartoš 建立了 n 维单形的正弦定理和与正弦有关的体积公式，令 V 表示 n 维单形 Ω 的体积，V_i 表示 Ω 的第 i 个界面的 $n-1$ 维体积，Bartoš 证明了

$$V=\frac{1}{n}\left[(n-1)!\ V_1\cdots V_{i-1}V_{i+1}\cdots V_{n+1}\sin\alpha_i\right]^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.45}$$

特别地,对四面体来说,设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是四个侧面向外的单位法向量,令

$$D_1=\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4),D_2=\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$$

$$D_3=\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4),D_4=\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$$

则 $\alpha_i=\arcsin|D_i|$ 即为此四面体的第 i 个侧面所对应的顶点角.

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 体积为 V,侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{2S_2S_3S_4\sin\alpha_1}=\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_3S_4\sin\alpha_2}=$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_4\sin\alpha_3}=\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3\sin\alpha_4} \tag{2.46}$$

2.3.2 应用

1.设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸顶点角为 α_i,任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内二面角为 θ_{ij},又 $x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数,则

$$x_2^2x_3^2x_4^2\sin^2\alpha_1+x_1^2x_3^2x_4^2\sin^2\alpha_2+x_1^2x_2^2x_4^2\sin^2\alpha_3+x_1^2x_2^2x_3^2\sin^2\alpha_4\leqslant$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_i^2x_j^2\sin^2\theta_{ij}\Big)^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{1}{27}\Big(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\Big)^3 \tag{2.47}$$

当 $x_1=x_2=x_3=x_4$,四面体为正四面体时取等号.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的单位法向量为 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=-\cos\theta_{ij}\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)$$

由于向量组 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 的秩为 3,从而向量组 $\{x_1\boldsymbol{e}_1,x_2\boldsymbol{e}_2,x_3\boldsymbol{e}_3,x_4\boldsymbol{e}_4\}$ 的秩也是 3,此向量组的 Gram 矩阵为

$$\boldsymbol{G}=(x_ix_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)_{i,j=1}^{4}=$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_1x_2\cos\theta_{12} & -x_1x_3\cos\theta_{13} & -x_1x_4\cos\theta_{14}\\ -x_1x_2\cos\theta_{12} & x_2^2 & -x_2x_3\cos\theta_{23} & -x_2x_4\cos\theta_{24}\\ -x_1x_3\cos\theta_{13} & -x_2x_3\cos\theta_{23} & x_3^2 & -x_3x_4\cos\theta_{34}\\ -x_1x_4\cos\theta_{14} & -x_2x_4\cos\theta_{24} & -x_3x_4\cos\theta_{34} & x_4^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{G}$ 是半正定的实对称矩阵,且 $\boldsymbol{G}$ 的秩为 3.$\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$p(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}|=0$$

(其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵)设其展开式为

$$p(\lambda)=\lambda^4-c_1\lambda^3+c_2\lambda^2-c_3\lambda+c_4=0 \tag{2.48}$$

因为 $\boldsymbol{G}$ 是半正定的实对称矩阵,所以方程(2.48)有三个正根,一个零根,当 $\lambda\neq 0$ 时,式(2.48)可化为

$$\lambda^3 - c_1\lambda^2 + c_2\lambda - c_3 = 0 \tag{2.49}$$

经计算可知，c_1 是 $\boldsymbol{G}$ 的所有一阶主子式之和，即

$$c_1 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \tag{2.50}$$

c_2 是 $\boldsymbol{G}$ 的所有二阶主子式之和，即

$$c_2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i^2 x_j^2 \sin^2\theta_{ij} \tag{2.51}$$

c_3 是 $\boldsymbol{G}$ 的所有三阶主子式之和，即

$$c_3 = x_2^2x_3^2x_4^2 \sin^2\alpha_1 + x_1^2x_3^2x_4^2 \sin^2\alpha_2 + x_1^2x_2^2x_4^2 \sin^2\alpha_3 + x_1^2x_2^2x_3^2 \sin^2\alpha_4 \tag{2.52}$$

由麦克劳林不等式得到

$$\frac{c_1}{\mathrm{C}_3^1} \geqslant \left(\frac{c_2}{\mathrm{C}_3^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{c_3}{\mathrm{C}_3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.53}$$

将式(2.50)，(2.51)，(2.52)代入(2.53)即可得式(2.47).

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时，易得 $\sin\theta_{ij} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，且 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时，式(2.47)取等号. 证毕.

2. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸顶点角为 α_i，$x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数，则

$$x_2x_3x_4 \sin^2\alpha_1 + x_1x_3x_4 \sin^2\alpha_2 + x_1x_2x_4 \sin^2\alpha_3 + x_1x_2x_3 \sin^2\alpha_4 \leqslant \frac{1}{27}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^3 \tag{2.54}$$

不等式(2.47)有广泛的应用，例如：当 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ 时，有：

3. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸顶点角为 α_i，则

$$\sum_{i=1}^{4} \sin^2\alpha_i \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3 \tag{2.55}$$

在式(2.47)中作置换 $x_i \to \sqrt{x_i}S_i(i=1,2,3,4)$，运用式(2.46)，有：

4. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，侧面面积为 S_i，$x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数，则

$$\frac{3^7}{4}V^4(x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} x_iS_i^2\right)^3 \tag{2.56}$$

在式(2.56)中作置换 $x_i \to x_iS_i^{-2}(i=1,2,3,4)$，有：

5. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，侧面面积为 S_i，$x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数，则

$$\frac{3^7}{4}V^4(x_2x_3x_4S_1^2 + x_1x_3x_4S_2^2 + x_1x_2x_4S_3^2 + x_1x_2x_3S_4^2) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^3 \prod_{i=1}^{4} S_i^2 \tag{2.57}$$

在式(2.57)中,取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$,得:

6. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$\frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)\leqslant\prod_{i=1}^{4}S_i^2 \tag{2.58}$$

对式(2.58)利用算术—几何平均值不等式,有:

7. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$V\leqslant\left(\frac{4^3}{3^7}\right)^{\frac{1}{4}}\prod_{i=1}^{4}S_i^{\frac{3}{8}} \tag{2.59}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

在式(12.18)中,取四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 为正四面体,则 $\sin\beta_1=\sin\beta_2=\sin\beta_3=\sin\beta_4=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,则可以得到:

8. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,顶点角分别为 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$,$y_i>0(i=1,2,3,4)$,则有

$$12\sqrt{3}(y_1y_2y_3\sin\alpha_4+y_1y_2y_4\sin\alpha_3+y_1y_3y_4\sin\alpha_2+y_2y_3y_4\sin\alpha_1)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{4}y_i\right)^3 \tag{2.60}$$

在式(2.60)中,令 $y_i=x_iS_i(x_i>0,i=1,2,3,4)$,得:

9. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,侧面面积为 S_i,$x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数,则

$$54\sqrt{3}V^2(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{4}x_iS_i\right)^3 \tag{2.61}$$

在式(2.47)中,作置换 $x_i\to\sqrt{x_i}S_i(i=1,2,3,4)$,利用式(2.46),则有:

10. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,侧面面积为 S_i,任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,又 $x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为任意正实数,则

$$\frac{3^{11}}{2^4}V^8(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^2\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_jS_i^2S_j^2\sin^2\theta_{ij}\right)^3 \tag{2.62}$$

最后,作为式(2.47)的一个应用,我们给出如下一个结论:

11*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点,过点 O 作各侧面的垂线,垂足分别为 B_1,B_2,B_3,B_4. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$,$B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V,V',则

$$V'\leqslant\frac{1}{27}V \tag{2.63}$$

证明　令 $OB_1=r_1,OB_2=r_2,OB_3=r_3,OB_4=r_4$;$V_1=V_{OB_2B_3B_4}$,$V_2=$

$V_{OB_1B_3B_4}$，$V_3=V_{OB_1B_2B_4}$，$V_4=V_{OB_1B_2B_3}$，则 $V_1+V_2+V_3+V_4=V'$. 且

$$V_1=\frac{1}{6}r_2r_3r_4\sin\alpha_1, V_2=\frac{1}{6}r_1r_3r_4\sin\alpha_2$$

$$V_3=\frac{1}{6}r_1r_2r_4\sin\alpha_3, V_4=\frac{1}{6}r_1r_2r_3\sin\alpha_4 \tag{2.64}$$

其中 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点角.

在式(2.54)中取 $x_i=S_ir_i(i=1,2,3,4)$ 得

$$[(r_2r_3r_4\sin\alpha_1)\cdot(S_2S_3S_4\sin\alpha_1)+(r_1r_3r_4\sin\alpha_2)\cdot(S_1S_3S_4\sin\alpha_2)+(r_1r_2r_4\sin\alpha_3)\cdot(S_1S_2S_4\sin\alpha_3)+(r_1r_2r_3\sin\alpha_4)\cdot(S_1S_2S_3\sin\alpha_4)]^{\frac{1}{3}}\leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}S_ir_i \tag{2.65}$$

利用式(2.46)和(2.64)及 $\sum\limits_{i=1}^{4}S_ir_i=3V$，得式(2.65)即为

$$\left(6V_1\cdot\frac{9}{2}V^2+6V_2\cdot\frac{9}{2}V^2+6V_3\cdot\frac{9}{2}V^2+6V_4\cdot\frac{9}{2}V^2\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}(3V)$$

即

$$V_1+V_2+V_3+V_4\leqslant\frac{1}{27}V$$

所以 $V'\leqslant\frac{1}{27}V$. 证毕.

第三章 涉及四面体体积、侧面积和棱长的不等式

1. 在任意四面体中，任意五条棱长之和大于第六条棱长的2倍.

证明 由三角形中性质“任意两边之和大于第三边”有

$$a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{23}+a_{24}>(a_{13}+a_{14})+(a_{23}+a_{24})>a_{34}+a_{34}=2a_{34}$$

其余同理可证. 证毕.

2. 在任意凸多面体中，某一个侧面的面积小于其余侧面的面积之和. (3.1)

利用立体几何中的射影面积公式可证特例：

3. 在四面体中，任意三个侧面面积之和大于第四个侧面的面积.

4*. 设 P 是四面体 $ABCD$ 内或侧面(含棱)上任一点，则

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}\geqslant S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDB} \tag{3.2}$$

证明 如图3.1所示，过点 P 作 $EP\perp$ 平面 BCD 交侧面(不妨设) ACD 于点 E，联结 EB，EC. 联结 DE 并延长交 AC 于点 F，则有

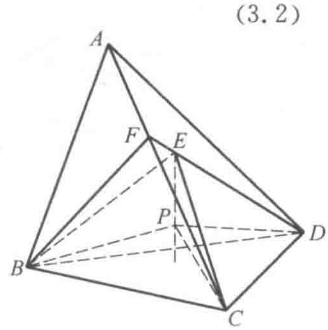


图3.1

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}\geqslant S_{\triangle EBD}+S_{\triangle FBC}+S_{\triangle FCD}=$$
$$(S_{\triangle FBC}+S_{\triangle FBE}+S_{\triangle FEC})+S_{\triangle EBD}+S_{\triangle ECD}\geqslant$$
$$S_{\triangle EBC}+S_{\triangle ECD}+S_{\triangle EDB}\geqslant$$
$$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDB}$$

5. 设 P 是四面体 $ABCD$ 内或侧面(含棱)上任一点,则

$$\frac{1}{2}S<S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCD}<\frac{3}{2}S\quad(3.3)$$

证明 如图 3.1 所示,因为

$$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCD}>S_{\triangle BCD},S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PCD}>S_{\triangle ACD}$$
$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PAD}>S_{\triangle ABD},S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}>S_{\triangle ABC}$$

四式相加,整理可得左边不等式.

由式(3.2)有

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}\geqslant S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDB}$$
$$S_{\triangle BAC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BAD}\geqslant S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}$$
$$S_{\triangle CAB}+S_{\triangle CAD}+S_{\triangle CBD}\geqslant S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PDB}$$
$$S_{\triangle DAB}+S_{\triangle DAC}+S_{\triangle DBC}\geqslant S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}$$

以上四式至多有一个取等号,将四式相加整理可得右边不等式. 证毕.

6. 设 M 是四面体 $ABCD$ 侧棱 AD 的中点,则

$$S_{\triangle MBC}<\frac{1}{2}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle DBC})\qquad(3.4)$$

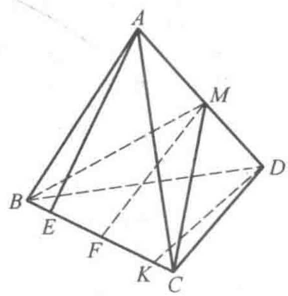


图 3.2

证明 如图 3.2 所示,过点 A,M,D 分别作 BC 的垂线 AE,MF,DK 交 BC 于点 E,F,K,因为 M 是 AD 的中点,所以 F 为 EK 的中点,因此 $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{KD})$,故

$$|\overrightarrow{FM}|<\frac{1}{2}(|\overrightarrow{EA}|+|\overrightarrow{KD}|)$$

所以
$$S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|MF|<$$
$$\frac{1}{4}|BC|(|EA|+|DK|)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|BC|\cdot|EA|+\frac{1}{2}|BC|\cdot|DK|\right)=$$
$$\frac{1}{2}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle DBC})$$

证毕.

7*. 若四面体 V' 的顶点在四面体 V 的内部或棱面上,则 V 的表面积不小于

V' 的表面积.

证明　如图 3.3 所示,四面体 $A'B'C'D'$ 内含于四面体 $ABCD$,过侧面 $\triangle A'B'D'$ 作截面交棱 BC,CD 分别于点 E,F,过侧面 $\triangle A'C'D'$ 作截面交棱 BC 于点 K,在多面体 $BDEFD'B'$ 中,由式(3.1)得

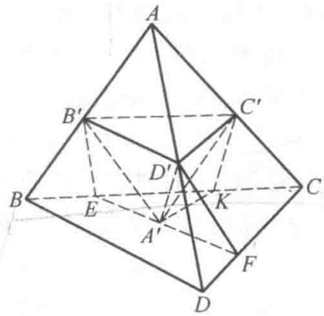


图 3.3

$$S_{\triangle BB'E}+S_{\text{四边形}BDB'D'}+S_{\triangle DD'F}+S_{\text{四边形}BDFE}\geqslant S_{\text{四边形}EFD'B'}$$

同理 $S_{\text{四边形}FCKA'}+S_{\text{四边形}FCC'D'}+S_{\triangle FA'D'}+S_{\triangle CC'K}\geqslant S_{\text{四边形}A'D'C'K}$

$$S_{\text{四边形}EKC'B'}+S_{\triangle EKA'}+S_{\triangle EA'B'}+S_{\triangle A'C'K}\geqslant S_{\triangle A'B'C'}$$

$$S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle AB'D'}+S_{\triangle AC'D'}\geqslant S_{\triangle B'C'D'}$$

于是

$$\begin{aligned}
&S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\\
&(S_{\triangle BB'E}+S_{\text{四边形}BDB'D'}+S_{\triangle DD'F}+S_{\text{四边形}BDFE})+\\
&(S_{\text{四边形}FCKA'}+S_{\text{四边形}FCC'D'}+S_{\triangle CC'K})+\\
&(S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle AB'D'}+S_{\triangle AC'D'})+(S_{\text{四边形}EKC'B'}+S_{\triangle A'EK})\geqslant\\
&S_{\text{四边形}EFD'B'}+(S_{\text{四边形}FCKA'}+S_{\text{四边形}FCC'D'}+S_{\triangle CC'K})+\\
&S_{\triangle B'C'D'}+(S_{\text{四边形}EKC'B'}+S_{\triangle A'EK})=\\
&S_{\triangle A'B'D'}+S_{\triangle B'C'D'}+(S_{\text{四边形}EKC'B'}+S_{\triangle EKA'}+S_{\triangle EA'B'}+S_{\triangle A'C'K})+\\
&(S_{\triangle A'EB'}+S_{\triangle A'EK}+S_{\text{四边形}EKC'B'})\geqslant\\
&S_{\triangle A'B'D'}+S_{\triangle B'C'D'}+S_{\text{四边形}A'KC'D'}+(S_{\triangle A'EB'}+S_{\triangle A'EK}+S_{\text{四边形}EKC'B'})=\\
&S_{\triangle A'B'D'}+S_{\triangle B'C'D'}+S_{\triangle A'C'D'}+(S_{\triangle A'EB'}+S_{\triangle A'C'K}+S_{\triangle A'EK}+S_{\text{四边形}EKC'B'})\geqslant\\
&S_{\triangle A'B'D'}+S_{\triangle B'C'D'}+S_{\triangle A'C'D'}+S_{\triangle A'C'D'}
\end{aligned}$$

若将式(3.4)中的面积换成棱长这个结论就不成立了,但是我们有如下的结果.

8.(杨路提出,胡安礼证明)若四面体 V' 在四面体 V 的内部,记 V' 的棱长之和为 $L(V')$,V 的棱长之和为 $L(V)$,则

$$L(V')<\frac{4}{3}L(V) \tag{3.5}$$

且系数 $\frac{4}{3}$ 是最佳的.

为证明式(3.5)我们需要如下四个引理.

引理 3.1　若 P_1,P_2 是过 $\triangle OPQ$ 顶点 P 的任一直线上位于点 P 两旁的点,则 $\triangle OP_1Q$,$\triangle OP_2Q$ 的周长至少有一个大于 $\triangle OPQ$ 的周长.

证明　考虑以 O,Q 两点为焦点,距离和为 $PO+PQ$ 的椭球面,因为点 P_1,

P_2 是过点 P 的直线上且位于点 P 两旁的点，故 P_1，P_2 至少有一个在此椭球面外部，不妨设为点 P_1，那么 $\triangle OP_1Q$ 的周长大于 $\triangle OPQ$ 的周长. 证毕.

引理 3.2　若 $\triangle OPQ$ 在平面凸 $n(n\geqslant 3)$ 边形内，则在此 n 边形的 n 个顶点中至少存在三个点，以这三个点为顶点的三角形的周长不小于 $\triangle OPQ$ 的周长.

证明　如图 3.4，设直线 PQ 交此 n 边形的边 B_1B_2 于点 P_1，交边 C_1C_2 于点 Q_1，延长 QO 交边 A_1A_2 于点 O_1. 由引理 3.1，得

$$\triangle O_1P_1Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_1P_1Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_1B_1Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_1B_1C_1\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle A_1B_1C_2\text{ 周长}\end{cases}\\ \text{或 }\triangle A_1B_2Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_1B_2C_1\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle A_1B_2C_2\text{ 周长}\end{cases}\end{cases}\\ \text{或 }\triangle A_2P_1Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_2B_1Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_2B_1C_1\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle A_2B_1C_2\text{ 周长}\end{cases}\\ \text{或 }\triangle A_2B_2Q_1\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle A_2B_2C_1\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle A_2B_2C_2\text{ 周长}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

而 $\triangle OPQ$ 的周长显然小于 $\triangle O_1P_1Q_1$ 的周长(当 O,P,Q 三点与多边形顶点重合时可取等号). 证毕.

引理 3.3　四面体内任一三角形的周长不大于该四面体某一侧面三角形的周长.

证明　设 $\triangle OPQ$ 为四面体 $ABCD$ 内任一三角形，过 $\triangle OPQ$ 作四面体截面，则只有如下两种可能：

(1) 截面为三角形，如图 3.5，不妨记为 $\triangle EFG$. 显然 $\triangle OPQ$ 的周长不大于 $\triangle EFG$ 的周长，由引理 3.1 知

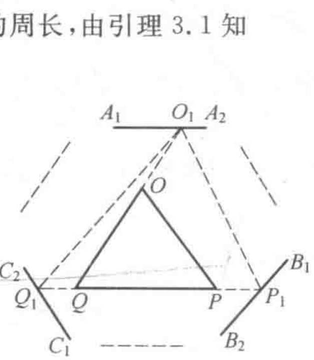


图 3.4

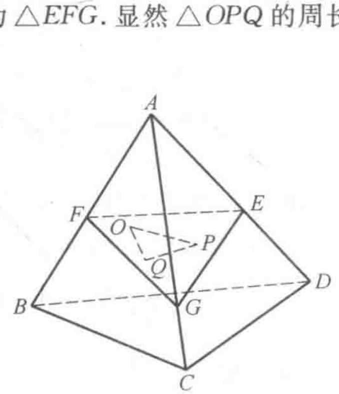


图 3.5

$$\triangle EFG\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle AEF\text{ 周长}<\triangle ABD\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle CEF\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle ACE\text{ 周长}<\triangle ACD\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle BCE<\begin{cases}\triangle ABC\text{ 周长}\\ \text{或 }\triangle BCD\text{ 周长}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

(2) 截面为四边形，如图 3.6，设为四边形 $EFGH$. 由引理 3.2 知，$\triangle OPQ$ 的周长不大于以 E,F,G,H 四点中某三点为顶点的三角形周长，不妨设为 $\triangle EFG$，再由引理 3.1 得 $\triangle EFG$ 的周长小于四面体某一侧面三角形的周长.

综合(1)(2) 知，四面体内任一三角形的周长不大于该四面体某一侧面三角形周长(当 O,P,Q 三点与四面体顶点重合时可取等号). 证毕.

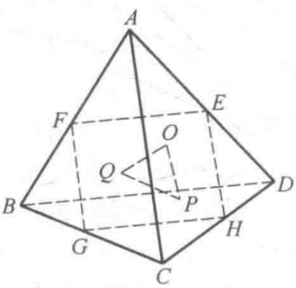


图 3.6

引理 3.4　四面体任一侧面三角形的周长小于各棱长之和的 $\frac{2}{3}$.

证明　如图 3.6，因为 $BC<AB+AC$，$CD<AC+AD$，$BD<AB+AD$，所以

$$BC+CD+DB<2(AB+AC+AD)$$

所以

$$3(BC+CD+DB)<2(AB+AC+AD+BC+CD+DB)$$

即 $BC+CD+DB<\frac{2}{3}(AB+AC+AD+BC+CD+DB)$. 证毕.

式(3.5)的证明　设四面体 V 的内含四面体 V' 各侧面三角形周长分别为 l_1,l_2,l_3,l_4，那么 $2L(V')=l_1+l_2+l_3+l_4$，设四面体 V 各侧面三角形中周长最大值为 l，由引理 3.3 有 $l_i\leqslant l(i=1,2,3,4)$，又由引理 3.4 知 $2L(V')=l_1+l_2+l_3+l_4\leqslant 4l<4\times\frac{2}{3}L(V)$，即

$$L(V')<\frac{4}{3}L(V)$$

下面证明系数 $\frac{4}{3}$ 是最佳的.

考虑退化四面体 $ABCF$：在底面 $\triangle ABC$ 中，取 $AB=AC=1$，$BC=\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 顶点 F 为 $\triangle ABC$ 的费马(Fermat) 点，由费马极值公式 $l=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta}$(其中 Δ 为 $\triangle ABC$ 的面积)，得

$$FA+FB+FC=\sqrt{1+\frac{1}{2}(\varepsilon^2+\sqrt{3}\varepsilon\sqrt{4-\varepsilon^2})}$$

于是 $\frac{4}{3}L(V)=\frac{4}{3}\left[2+\varepsilon+\sqrt{1+\frac{1}{2}(\varepsilon^2+\sqrt{3}\varepsilon\sqrt{4-\varepsilon^2})}\right]\to 4 \quad (\varepsilon\to 0)$

取四面体 V' 底面为 $\triangle ABC$，顶点为 A，则

$$L(V')=4+\varepsilon\to 4 \quad (\varepsilon\to 0)$$

证毕.

9.(1966 年保加利亚) 任意一个四面体总有一个顶点，由这个顶点出发的三条棱可以构成一个三角形的三边.

证法一 设 AB 是四面体 $ABCD$ 中最长的棱，则有

$$(AC+AD-AB)+(BC+DB-AB)=$$
$$(AC+CB-AB)+(AD+DB-AB)>0$$

因此，要么 $AC+AD>AB$，要么 $BC+BD>AB$. 这就保证，要么 AB,AC,AD 三条棱，要么 BA,BC,BD 三条棱能构成三角形. 证毕.

证法二 利用反证法. 设四面体 $ABCD$ 中 AB 是最长的棱，若任意一个顶点出发的三条棱都不能构成一个三角形，则对由 A 出发的三条棱，有 $AB\geqslant AC+AD$. 又对由 B 出发的三条棱，有 $AB\geqslant BC+BD$. 两式相加，得 $2AB\geqslant AC+AD+BC+BD$.

但在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，有 $AB<AC+AD$，$AB<BC+BD$. 此两式相加，得 $2AB<AC+AD+BC+BD$. 矛盾，故原结论成立. 证毕.

10. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，$\lambda\geqslant 1$，$S=\sum S_1$，则

$$\frac{4}{3^\lambda}\leqslant\sum\left(\frac{S_1}{S-S_1}\right)^\lambda<2 \tag{3.6}$$

当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 因为 $\sum\frac{S_1}{S-S_1}=S\cdot\sum\frac{1}{S-S_1}-4=$

$$\frac{1}{3}\left[\sum(S-S_1)\right]\sum\frac{1}{S-S_1}-4\geqslant$$
$$\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

由于 $\lambda\geqslant 1$，由幂平均不等式，得

$$\sum\left(\frac{S_1}{S-S_1}\right)^\lambda\geqslant 4^{1-\lambda}\cdot\left(\sum\frac{S_1}{S-S_1}\right)^\lambda\geqslant 4^{1-\lambda}\left(\frac{4}{3}\right)^\lambda=\frac{4}{3^\lambda}$$

又由于 $S_1<S-S_1$，即 $2S_1<S$，于是

$$\left(\frac{S_1}{S-S_1}\right)^\lambda=\left(\frac{2S_1}{2S-2S_1}\right)^\lambda<\left(\frac{2S_1}{S}\right)^\lambda=\frac{2S_1}{S}\left(\frac{2S_1}{S}\right)^{\lambda-1}<\frac{2S_1}{S}$$

所以$\sum\left(\frac{S_1}{S-S_1}\right)^{\lambda}<\sum\frac{2S_1}{S}=2$. 证毕.

11.(吴善和，石焕南) 设四面体六条棱长为 $a_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$\lambda\geqslant 1$，$s=\sum_{i=1}^{6}a_i$，则

$$\frac{6}{5^{\lambda}}\leqslant\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^{\lambda}<\frac{3}{2^{\lambda}} \tag{3.7}$$

当且仅当该四面体为正四面体时等号成立.

证明

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{s-a_i}=-6+s\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{s-a_i}=$$
$$-6+\frac{1}{5}\left[\sum_{i=1}^{6}(s-a_i)\right]\cdot\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{s-a_i}\geqslant$$
$$-6+\frac{1}{5}\times 36=\frac{6}{5}$$

注意到 $\lambda\geqslant 1$，由幂平均不等式，得

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^{\lambda}\geqslant 6\cdot\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{s-a_i}\right)^{\lambda}\geqslant 6\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\right)^{\lambda}=\frac{6}{5^{\lambda}}$$

从以上的证明可知，上述不等式等号成立的条件是 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6$，即四面体为正四面体时.

由三角形性质“三角形两边之和大于第三边”得

$$s>3a_i\quad(1\leqslant i\leqslant 6)$$

所以

$$\frac{a_i}{s-a_i}=\frac{3a_i}{3s-3a_i}<\frac{3a_i}{3s-s}=\frac{3a_i}{2s}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^{\lambda}<\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{3a_i}{2s}\right)^{\lambda}=\sum_{i=1}^{6}\frac{3a_i\cdot(3a_i)^{\lambda-1}}{(2s)^{\lambda}}<\sum_{i=1}^{6}\frac{3a_i\cdot s^{\lambda-1}}{(2s)^{\lambda}}=\frac{3}{2^{\lambda}}$$

证毕.

12. 设四面体 $ABCD$ 的棱长 $AB=a$，$CD=a'$，$AC=b$，$BD=b'$，$AD=c$，$BC=c'$，则

$$S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{36}(a+a'+b+b'+c+c')^2 \tag{3.8}$$

当四面体 $ABCD$ 为正四面体时取等号.

证明 （樊益武）由三角形中的不等式 $\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}}$，有

$$\sum_{k=1}^{4}S_k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(abc')^{\frac{2}{3}}+(a'bc)^{\frac{2}{3}}+(ab'c)^{\frac{2}{3}}+(a'b'c')^{\frac{2}{3}}\right]\leqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}(abc'+a'bc+ab'c+a'b'c')^{\frac{2}{3}}$$

下面证明 $abc'+a'bc+ab'c+a'b'c' \leqslant \frac{1}{54}(a+a'+b+b'+c+c')^3$.

在两组不等式 $a \geqslant a', b \geqslant b', c \geqslant c'$ 和 $a' \geqslant a, b' \geqslant b, c' \geqslant c$ 中，总有两个同时成立.

不妨设 $a \geqslant a', b \geqslant b'$.

1）当 $c=c'$ 时

$$abc'+a'bc+ab'c+a'b'c' = c(a+a')(b+b') \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+a'+b+b'+2c}{3}\right)^3 = \frac{1}{54}(a+a'+b+b'+c+c')^3$$

2）当 $c>c'$ 时，取 $\varepsilon=\frac{c-c'}{2}$.

考虑 $ab(c'+\varepsilon)+a'b(c-\varepsilon)+ab'(c-\varepsilon)+a'b'(c'+\varepsilon)=$

$abc'+a'bc+ab'c+a'b'c'+\varepsilon(a-a')(b-b')>$

$abc'+a'bc+ab'c+a'b'c'$

此时 $c-\varepsilon=c'+\varepsilon$，可以转化成 1).

当 $c<c'$ 时

$$abc'+a'bc+ab'c+a'b'c' = (ab+a'b')c'+(a'b+ab')c \leqslant (ab+a'b')c+(a'b+ab')c' = abc+a'b'c+a'bc'+ab'c'$$

仿 $c>c'$ 情形可证明. 证毕.

实际上，此处我们证明了如下不等式：

对于任意 $a,a',b,b',c,c'>0$，有

$$(abc')^{\frac{2}{3}}+(a'bc)^{\frac{2}{3}}+(ab'c)^{\frac{2}{3}}+(a'b'c')^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{1}{9}(a+a'+b+b'+c+c')^2 \tag{3.9}$$

13. 设四面体 $ABCD$ 的棱长 $AB=a, CD=a', AC=b, BD=b', AD=c, BC=c'$，则

$$\sum S_1^2 \leqslant \frac{1}{48}\left[\sum(a^2+a'^2)\right]^2 \tag{3.10}$$

当四面体 $ABCD$ 为正四面体时取等号.

证明 由三角形中的 Polya-Szego 不等式 $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}}$，有

$$\sum S_1^2 \leqslant \frac{3}{16}\left[(abc')^{\frac{4}{3}}+(a'bc)^{\frac{4}{3}}+(ab'c)^{\frac{4}{3}}+(a'b'c')^{\frac{4}{3}}\right] \tag{3.11}$$

在式(3.9)中作置换 $a \to a^2, a' \to a'^2, b \to b^2, b' \to b'^2, c \to c^2, c' \to c'^2$，有

$$(abc')^{\frac{4}{3}}+(a'bc)^{\frac{4}{3}}+(ab'c)^{\frac{4}{3}}+(a'b'c')^{\frac{4}{3}}\leqslant$$
$$\frac{1}{9}(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)^2 \tag{3.12}$$

将式(3.12)代入式(3.11)即得式(3.10).证毕.

14. $$\sum S_1^2\leqslant\frac{16}{3}R^4 \tag{3.13}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 将式(4.7)代入式(3.10)可得式(3.13).证毕.

15. $$S\leqslant\frac{8}{\sqrt{3}}R^2 \tag{3.14}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由幂平均不等式,有 $S\leqslant\left(4\sum S_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(4\cdot\frac{16}{3}R^4\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}R^2$.证毕.

16*. $\frac{8}{3}\leqslant\frac{S^2}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j}<4$,当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 因为 $3S^2-8\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=3\sum S_1^2-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(S_i-S_j)^2\geqslant 0$,所以

$$\frac{8}{3}\leqslant\frac{S^2}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j}$$

又因为 $$4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j-S^2=\sum S(S-2S_1)>0$$

因此 $$\frac{S^2}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j}<4$$

证毕.

同理可证明:

17*. $\frac{1}{4}\leqslant\frac{\sum S_1^2}{S^2}<\frac{1}{2}$,当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

18*. $\frac{S_2-S_1}{S-2S_1}+\frac{S_3-S_2}{S-2S_2}+\frac{S_4-S_3}{S-2S_3}+\frac{S_1-S_4}{S-2S_4}\leqslant 0$,当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 设 $S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant S_4$,则 $\frac{1}{S-2S_1}\leqslant\frac{1}{S-2S_2}\leqslant\frac{1}{S-2S_3}\leqslant\frac{1}{S-2S_4}$,由排序不等式(乱序和)$\leqslant$(顺序和),得

$$\frac{S_2}{S-2S_1}+\frac{S_3}{S-2S_2}+\frac{S_4}{S-2S_3}+\frac{S_1}{S-2S_4}\leqslant$$

$$\frac{S_1}{S-2S_1}+\frac{S_2}{S-2S_2}+\frac{S_3}{S-2S_3}+\frac{S_4}{S-2S_4}$$

移项整理可得所证.证毕.

19*.当 $k\geqslant 1$ 时,有

$$\frac{S_1}{k(S_2+S_3+S_4)-S_1}+\frac{S_2}{k(S_1+S_3+S_4)-S_2}+\frac{S_3}{k(S_1+S_2+S_4)-S_3}+$$

$$\frac{S_4}{k(S_1+S_2+S_3)-S_4}\geqslant\frac{4}{3k-1}$$

当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 不妨设 $S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant S_4$,则

$$\frac{1}{k(S_2+S_3+S_4)-S_1}\leqslant$$

$$\frac{1}{k(S_1+S_3+S_4)-S_2}\leqslant$$

$$\frac{1}{k(S_1+S_2+S_4)-S_3}\leqslant$$

$$\frac{1}{k(S_1+S_2+S_3)-S_4}$$

由切比雪夫不等式,有

$$\frac{S_1}{k(S_2+S_3+S_4)-S_1}+\frac{S_2}{k(S_1+S_3+S_4)-S_2}+$$

$$\frac{S_3}{k(S_1+S_2+S_4)-S_3}+\frac{S_4}{k(S_1+S_2+S_3)-S_4}\geqslant$$

$$\frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4)(\frac{1}{k(S_2+S_3+S_4)-S_1}+$$

$$\frac{1}{k(S_1+S_3+S_4)-S_2}+\frac{1}{k(S_1+S_2+S_4)-S_3}+\frac{1}{k(S_1+S_2+S_3)-S_4})=$$

$$\frac{1}{4(3k-1)}\sum_{i=1}^{4}[kS-(k+1)S_i]\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{kS-(k+1)S_i}\geqslant\frac{4}{3k-1}$$

20*. $$(6+2\sqrt{3})\sqrt{\prod S_1}\leqslant\left(\sum S_1\right)^2-\frac{5-\sqrt{3}}{2}\sum S_1^2\qquad(3.15)$$

当且仅当四面体为等面四面体时取等号.

证明 因为式(3.15)关于 S_1,S_2,S_3,S_4 齐次对称,所以要证式(3.15),只要证下面的式

$$(6+2\sqrt{3})\sqrt{\prod x_1}+\frac{5-\sqrt{3}}{2}\sum x_1^2\leqslant 1\qquad(3.16)$$

其中 $0 < x_i < \frac{1}{2}(i=1,2,3,4)$ 且 $\sum x_1 = 1$.

下面用拉格朗日乘子法证之.

设 $f=(6+2\sqrt{3})\sqrt{\prod x_1}+\frac{5-\sqrt{3}}{2}\sum x_1^2$.

令 $F=f+\lambda\left(\sum x_1-1\right)$，则

$$F'_{x_i}=(5-\sqrt{3})x_i+(3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}}{x_i}+\lambda=0 \quad (i=1,2,3,4)$$

不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$，有

$$F'_{x_1}-F'_{x_2}=(x_1-x_2)\left[(5-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{x_3x_4}{x_1x_2}}\right]=0$$

因为 $\frac{x_3x_4}{x_1x_2} \geqslant 1$，所以 $(5-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{x_3x_4}{x_1x_2}} \leqslant 2-2\sqrt{3} < 0$，所以 $x_1=x_2$.

同理，由 $F'_{x_1}-F'_{x_3}=(x_1-x_3)\left[(5-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{x_2x_4}{x_1x_3}}\right]=0$，得 $x_1=x_3$.

又由 $F'_{x_1}-F'_{x_4}=(x_1-x_4)\left[(5-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{x_1}{x_4}}\right]=0$，得：

若 $x_1=x_4$，则得一组解 $X_1: x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$.

若 $x_1 \neq x_4$，则由 $(5-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{x_1}{x_4}}=0$，得 $x_4=\frac{6+3\sqrt{3}}{14-5\sqrt{3}}x_1$，代入 $\sum x_1=1$ 得另一组解 $X_2: x_1=x_2=x_3=\frac{41-6\sqrt{3}}{156}, x_4=\frac{33+18\sqrt{3}}{156}$.

计算知 $f(X_1)=1, f(X_2)=0.992\,792\,589 < 1$.

下面考虑边界情形.

当 $x_1=0$ 时，注意到 $0 < x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 < \frac{1}{2}$，且 $x_2+x_3+x_4=1$，则

$$f=\frac{5-\sqrt{3}}{2}(x_2^2+x_3^2+x_4^2) \leqslant \frac{5-\sqrt{3}}{4} < 1$$

当 $x_4=\frac{1}{2}$ 时，这时 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 < \frac{1}{2}$，且 $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$，则

$$f=\frac{(6+2\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\sqrt{x_1x_2x_3}+\frac{5-\sqrt{3}}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{1}{4})$$

用拉格朗日乘子法，可得

$$f_{\max}=f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=1$$

综上，有 $$f_{\max}=f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=1$$

用同样的方法还可以证明下述不等式：

21*. $$32\prod S_1\leqslant 3\left(\sum S_1^2\right)^2-4\sum S_1^4 \tag{3.17}$$

当且仅当四面体为等面四面体时取等号.

22*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 体积为 V，侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，则

$$\left(\sum S_1^2\right)^2-\frac{4}{3}\sum S_1^4\geqslant 54\sqrt[3]{9}V^{\frac{8}{3}} \tag{3.18}$$

当且仅当四面体为等面四面体时取等号.

证明 由式(2.59)得

$$\prod S_1\geqslant\frac{3^{\frac{14}{3}}}{4^2}V^{\frac{8}{3}}$$

代入式(3.17)得

$$3\left(\sum S_1^2\right)^2-4\sum S_1^4\geqslant 162\sqrt[3]{9}V^{\frac{8}{3}}$$

23. 对于任意四面体：

(1) 三组对棱之积可以构成一个三角形的三边.

(2) 三组对棱之积的算术平方根可以构成一个三角形的三边.

(3) 三组对棱之平方和可以构成一个三角形的三边.

(4) 三组对棱之平方和的算术平方根可以构成一个三角形的三边.

(5) 三组对棱之和的平方可以构成一个三角形的三边.

(6) 三组对棱之和可以构成一个三角形的三边.

证明 设四面体 $ABCD$ 中，三组对棱 $AB,CD;AC,BD;AD,BC$ 的棱长分别为 $a,a';b,b';c,c'$.

(1) 由空间 Ptolemy 不等式得知 $bb'+cc'>aa'$.

(2) 因为$(\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'})^2>bb'+cc'$，所以$\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}>\sqrt{aa'}$.

(3) 由式(1.16)可知：$(b^2+b'^2)+(c^2+c'^2)>a^2+a'^2$.

(4) 同(2)可证明.

(5) 由(1)(3)可知：$(b+b')^2+(c+c')^2>(a+a')^2$.

(6) 由(3)可知：$[(b+b')+(c+c')]^2>(b+b')^2+(c+c')^2>(a+a')^2$，所以

$$(b+b')+(c+c')>a+a'$$

下面，我们给出四面体的对棱所成三角形的一些性质. 为了行文的方便，在问题 $24\sim37$ [10] 中，我们约定四面体 $ABCD$ 中，三组对棱 $AB,CD;AC,BD;$

AD,BC 的棱长分别为 $a,a';b,b';c,c'$.

24.若记以 aa',bb',cc' 为边的三角形的面积为 F_1,则有

$$F_1=6RV \tag{3.19}$$

25.若记以$\sqrt{aa'},\sqrt{bb'},\sqrt{cc'}$ 为边的三角形的面积为 F_{11},则有

$$F_{11}=\frac{1}{16}[3\ (6RV)^2+\varepsilon_1^2] \tag{3.20}$$

其中 $\varepsilon_1^2=\frac{1}{2}\sum(bb'+cc'-aa')^2\ (bb'-cc')^2$.

要证明式(3.20)需要如下引理:

引理 3.5　若 $\triangle ABC$ 三边为 a,b,c,面积为 Δ,则以$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为边可以构成三角形(其面积记为 Δ'),且有

$$(16\Delta'^2)^2=3\times 16\Delta^2+\frac{1}{2}\sum(b+c-a)^2\ (b-c)^2 \tag{3.21}$$

证明　由恒等式

$$(xy+yz+zx)^2=3xyz(x+y+z)+\frac{1}{2}[x^2\ (y-z)^2+$$
$$y^2\ (z-x)^2+z^2\ (x-y)^2]$$

令 $x=b+c-a,y=a+c-b,z=a+b-c$,有

$$(-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca)^2=$$
$$2(b+c-a)\ (c+a-b)\ (a+b-c)\ (a+b+c)+$$
$$\frac{1}{2}\sum(b+c-a)^2\ (b-c)^2 \tag{3.22}$$

由 Heron— 秦九韶公式,有

$$16\Delta'^2=-\sum a^2+2\sum ab \tag{3.23}$$

由上述式(3.22),(3.23)便知式(3.20)成立.

显然,由式(3.19),(3.21)可知式(3.20)成立. 由式(3.20)立得:

26.
$$F_{11}^2\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}RV \tag{3.24}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

27.若记以 $a^2+a'^2,b^2+b'^2,c^2+c'^2$ 为边的三角形的面积为 F_2,则

$$F_2\geqslant 4\sqrt{3}\ (3V)^{\frac{4}{3}} \tag{3.25}$$

首先证明一个引理.

引理 3.6
$$F_2=4l_1l_2l_3\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2} \tag{3.26}$$

证明　由于

$$l_1^2=\frac{1}{4}(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)$$

$$l_2^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)$$

$$l_3^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)$$

所以 $a^2+a'^2=2(l_2^2+l_3^2)$，$b^2+b'^2=2(l_1^2+l_3^2)$，$c^2+c'^2=2(l_1^2+l_2^2)$.

由三角形中的 Heron— 秦九韶公式，有

$$\begin{aligned}16F_2^2=&2\sum(a^2+a'^2)^2(b^2+b'^2)^2-\sum(c^2+c'^2)^4=\\&2\sum[2(l_1^2+l_3^2)]^2[2(l_2^2+l_3^2)]^2-\sum[2(l_1^2+l_2^2)]^4=\\&16^2l_1^2l_2^2l_3^2(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\end{aligned}$$

故
$$F_2=4l_1l_2l_3\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}$$
证毕.

式(3.25)的证明 由算术－几何平均值不等式及式(6.3)，得

$$\begin{aligned}F_2=&4l_1l_2l_3\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}\geqslant4l_1l_2l_3\sqrt{3\sqrt[3]{(l_1l_2l_3)^2}}=\\&4\sqrt{3}(l_1l_2l_3)^{\frac{4}{3}}\geqslant4\sqrt{3}(3V)^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

由于 $\sum S_1^2=\sum T_1^2=(l_1l_2\sin\theta)^2+(l_2l_3\sin\psi)^2+(l_3l_1\sin\varphi)^2$（其中 T_1，T_2，T_3 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接平行六面体过同一顶点的三个侧面的面积，l_1，l_2，l_3 是该六面体过同一顶点的三条棱长，θ,ψ,φ 分别是 l_1,l_2；l_2,l_3；l_3,l_1 的夹角）. 可以证明 F_2 与 $\sum S_1^2$ 不能比较，这就否定了文献[9]中提出的猜想不等式

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}\sum S_1^2\geqslant F_2$$

事实上，当 $l_1\to0$ 时，$F_2\to0$，$\sum S_1^2\to(l_2l_3\sin\psi)^2$，这时 $\frac{4}{3}\sqrt{3}\sum S_1^2>F_2$. 当 $\theta,\psi,\varphi\to0$ 时，$\sum S_1^2\to0$，$F_2=4l_1l_2l_3\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}>0$，这时 $\frac{4}{3}\sqrt{3}\sum S_1^2<F_2$.

28. 若记以 $\sqrt{a^2+a'^2}$，$\sqrt{b^2+b'^2}$，$\sqrt{c^2+c'^2}$ 为边的三角形的面积为 F_{21}，则

$$F_{21}^2\geqslant\sum S_1^2\tag{3.27}$$

引理 3.7
$$F_{21}^2=\sum S_1^2+\varepsilon_2^2\tag{3.28}$$

其中 $\varepsilon_2^2=\frac{1}{16}\sum(a^2-a'^2)^2$.

证明 在 $\triangle ABC$ 中，由 Heron— 秦九韶公式，有

$$16\Delta^2=-\sum a^4+2\sum a^2b^2=\sum a^2(b^2+c^2-a^2)$$

$$16F_{21}^2=\sum(a^2+a'^2)(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)$$

又由式(6.10),得

$$\begin{aligned}16\sum S_1^2=&-2\sum(a^4+a'^4)+2\sum(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)=\\&-\sum(a^2+a'^2)^2+2\sum(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)-\\&\sum(a^2-a'^2)^2=\\&\sum(a^2+a'^2)(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)-\\&\sum(a^2-a'^2)^2=\\&16F_{21}^2-16\varepsilon_2^2\end{aligned}$$

变形既得式(3.28).

由此立得式(3.27)成立.

由引理3.5还可以得到又一从三角形到四面体的等价变换.

29. $f(a^2,b^2,c^2)\geqslant\Delta^2\Rightarrow f(a^2+a'^2,b^2+b'^2,c^2+c'^2)\geqslant\sum S_1^2$.

例如由三角形中的Weitzenböck不等式 $4\sqrt{3}\Delta\leqslant\sum a^2$,立得式(3.11).

又由Pólya-Szegö不等式 $\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}}$,得:

30. $$\sum S_1^2\leqslant\frac{3}{16}\left[(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)\right]^{\frac{2}{3}}\tag{3.29}$$

31. 若记以 $a+a',b+b',c+c'$ 为边的三角形的面积为 F_3,则

$$F_3^2=F_{21}^2+12F_{11}^2+\varepsilon_3^2=3F_{21}^2+4F_{11}^2-\varepsilon_4^2\tag{3.30}$$

其中
$$\varepsilon_3^2=\frac{1}{4}\sum(bb'+cc'-aa')(a-a')^2$$

$$\varepsilon_4^2=\frac{1}{8}\sum(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)(a-a')^2$$

证明 由Heron—秦九韶公式,有

$$\begin{aligned}16F_3^2=&-\sum(a+a')^4+2\sum(b+b')^2(c+c')^2=\\&-\sum(a^2+a'^2+2aa')^2+\\&2\sum(b^2+b'^2+2bb')(c^2+c'^2+2cc')=\\&-\sum\left[(a^2+a'^2)^2+4a^2a'^2+4aa'(a^2+a'^2)\right]+\\&2\sum\left[(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)+\right.\\&\left.4bb'cc'+2bb'(c^2+c'^2)+2cc'(b^2+b'^2)\right]=\end{aligned}$$

$$[-\sum (a^2+a'^2)^2+2\sum (b^2+b'^2)(c^2+c'^2)]+$$

$$4[-\sum (aa')^2+2\sum (bb')(cc')]+$$

$$4\sum (bb'+cc'-aa')(a^2+a'^2)=$$

$$16F_{21}^2+64F_{11}^2+4\sum (bb'+cc'-aa')(a^2+a'^2) \tag{3.31}$$

在式(3.31)中,注意到 $a^2+a'^2=(a-a')^2+2aa'$,可得

$$16F_3^2=16F_{21}^2+64F_{11}^2+4\sum (bb'+cc'-aa')[(a-a')^2+2aa']=$$

$$16F_{21}^2+64F_{11}^2+8[-\sum (aa')^2+2\sum (bb')(cc')]+$$

$$4\sum (bb'+cc'-aa')(a-a')^2=$$

$$16F_{21}^2+192F_{11}^2+16\varepsilon_3^2 \tag{3.32}$$

$$16F_3^2=16F_{21}^2+64F_{11}^2+4\sum (b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)aa' \tag{3.33}$$

在式(3.33)中,注意到 $aa'=\frac{1}{2}[(a^2+a'^2)-(a-a')^2]$,可得

$$16F_3^2=16F_{21}^2+64F_{11}^2+2\sum (b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)\cdot$$

$$[(a^2+a'^2)-(a-a')^2]=$$

$$16F_{21}^2+64F_{11}^2+2[-\sum (a^2+a'^2)^2+$$

$$2\sum (b^2+b'^2)(c^2+c'^2)]-$$

$$2\sum (b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)(a-a')^2=$$

$$48F_{21}^2+64F_{11}^2-16\varepsilon_4^2 \tag{3.34}$$

由上述的式(3.32),(3.34)即得(3.30)成立.证毕.

由此立得:

32.
$$F_{11}^2=\frac{1}{4}F_{21}^2-\varepsilon_5^2 \tag{3.35}$$

其中 $\varepsilon_5^2=\frac{1}{64}\sum[(b+b')^2+(c+c')^2-(a+a')^2](a-a')^2$.

33.
$$3F_{21}^2+4F_{11}^2\geqslant F_3^2\geqslant F_{21}^2+12F_{11}^2 \tag{3.36}$$

34.
$$2F_{21}\geqslant F_3\geqslant 4F_{11}\geqslant 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{6RV} \tag{3.37}$$

35.若记以$\sqrt{a+a'}$,$\sqrt{b+b'}$,$\sqrt{c+c'}$ 为边的三角形的面积为 F_{31},则有

$$F_{31}^2\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\sum S_1+\varepsilon_6^2 \tag{3.38}$$

其中 $\varepsilon_6=\frac{1}{16}\sum (a-a')^2$.

证明 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的各面中，以 $\sqrt{a'},\sqrt{b'},\sqrt{c'};\sqrt{a'},\sqrt{b},\sqrt{c};\sqrt{a},\sqrt{b'},\sqrt{c};\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c'}$ 为边皆可构成三角形，其面积分别记为 S'_1,S'_2,S'_3,S'_4，由式(3.20)得

$$S'^2_i \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}S_i \quad (i=1,2,3,4) \tag{3.39}$$

在 $S'_i(i=1,2,3,4)$ 中，由 Heron— 秦九韶公式，有

$$16S'^2_1=-a'^2-b'^2-c'^2+2a'b'+2b'c'+2c'a'$$
$$16S'^2_2=-a'^2-b^2-c^2+2a'b+2bc+2ca'$$
$$16S'^2_3=-a^2-b'^2-c^2+2ab'+2b'c+2ca$$
$$16S'^2_4=-a^2-b^2-c'^2+2ab+2bc'+2c'a$$

将以上四式相加，并整理，得

$$16\sum_{i=1}^{4}S'^2_i=-\sum(a+a')^2+2\sum(b+b')(c+c')-\sum(a-a')^2=$$
$$16F^2_{31}-\sum(a-a')^2 \tag{3.40}$$

在式(3.40)中应用式(3.39)，即知式(3.38)成立. 证毕.

36. $$f(a^2,b^2,c^2)\geqslant\Delta^2\Rightarrow f(a+a',b+b',c+c')\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\sum S_1 \tag{3.41}$$

37. $$(a+a')(b+b')(c+c')\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\sum(a+a')\sum S_1 \tag{3.42}$$

证明 由式(1.3)：$\frac{16}{9}\Delta^2\sum a^2\leqslant(abc)^2$ 及式(3.41)即得式(3.42). 证毕.

对式(3.42)的左边用算术－几何均值不等式立即可得式(3.9).

38*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，顶点 A_i 所对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，记 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\prod_{i=1}^{4}S_i\geqslant\frac{3^4}{2^5}\Big(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\Big)^{\frac{1}{3}}\cdot V^2 \tag{3.43}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 设侧面 S_i 与 S_j 所成的二面角为 θ_{ij}，由四面体体积公式 $S_iS_j=\frac{3a_{ij}V}{2\sin\theta_{ij}}$ 得

$$(S_1S_2S_3S_4)^3=\frac{3^6\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\cdot V^6}{2^6\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}}$$

将 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}\leqslant\frac{2^9}{3^6}$ 代入上式即可得式(3.43). 证毕.

39^*. 设 R_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 f_i 的外接圆的半径($i=1,2,3,4$),则

$$(\prod S_1)^{\frac{5}{3}} \geqslant \frac{3^8}{2^{\frac{22}{3}}}(\prod R_1)^{\frac{1}{3}} V^4 \tag{3.44}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 将三角形的面积公式:$\Delta=\dfrac{abc}{4R}$ 运用于各侧面 f_i,再相乘,得

$$(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij})^2 = 4^4 \prod R_1 \cdot \prod S_1 \tag{3.45}$$

将式(3.45)代入式(3.43)整理可得式(3.44).证毕.

40^*.
$$V^2 \geqslant \frac{1}{2^5}(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij})^{\frac{1}{3}} \cdot h_1h_2h_3h_4 \tag{3.46}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 对式(3.43)两边同乘以 $h_1h_2h_3h_4$,并运用体积公式 $V=\dfrac{1}{3}S_ih_i$,可得式(3.46).证毕.

41.
$$(\prod_{i=1}^{4} S_i)^2 \geqslant \frac{3^{\frac{17}{2}}}{2^7} \cdot RV^5 \tag{3.47}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 将不等式:$V \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{24R} \cdot (\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij})^{\frac{2}{3}}$ 代入式(3.43),整理可得式(3.47).

42^*.
$$V \geqslant 8\sqrt[3]{\sqrt{3}R} \cdot r^{\frac{8}{3}} \tag{3.48}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 对式(3.47)两边同乘以 $h_1^2h_2^2h_3^2h_4^2$,并利用公式 $V=\dfrac{1}{3}S_ih_i$,得

$$V^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2^7} \cdot Rh_1^2h_2^2h_3^2h_4^2$$

注意到 $h_1h_2h_3h_3 \geqslant 4^4r^4$,有

$$V^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2^7} \cdot R4^8r^8 = 2^9\sqrt{3}Rr^8$$

即
$$V \geqslant 8\sqrt[3]{\sqrt{3}R} \cdot r^{\frac{8}{3}}$$

证毕.

43.(杨克昌)设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,顶点 A_i 所对的侧面面积为 S_i($i=1,2,3,4$),记 $a_{ij}=|A_iA_j|$($1\leqslant i<j\leqslant 4$),则

$$(\sum_{i=1}^{4} S_i)^2 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant 2\sqrt{2}V(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}) \tag{3.49}$$

证明　设侧面 S_i 与 S_j 所成的二面角为 θ_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，由射影定理 $S_1 = S_2\cos\theta_{12} + S_3\cos\theta_{13} + S_4\cos\theta_{14}$ 等，得

$$\begin{aligned}3\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{4} S_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{4} S_i^2 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j = \\ \sum (S_2+S_3+S_4-S_1)S_1 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j = \\ \sum\left[S_1S_2(1-\cos\theta_{12}) + S_1S_3(1-\cos\theta_{13}) + \right. \\ \left. S_1S_4(1-\cos\theta_{14})\right] + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j = \\ \sum\left(2S_1S_2\sin^2\frac{\theta_{12}}{2} + 2S_1S_3\sin^2\frac{\theta_{13}}{2} + \right. \\ \left. 2S_1S_4\sin^2\frac{\theta_{14}}{2}\right) + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j = \\ 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\left(\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2} + 1\right)\end{aligned}$$

用导数易证 $\sin^2\dfrac{\theta_{ij}}{2} + 1 \geqslant \sqrt{2}\sin\theta_{ij}$ $(0 < \theta_{ij} < \pi)$，注意到 $V = \dfrac{2S_iS_j\sin\theta_{ij}}{3a_{ij}}$，有

$$3\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant 4\sqrt{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\sin\theta_{ij} = 6\sqrt{2}V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}$$

证毕.

由此可推出：

44. $$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 \geqslant 3\sqrt{2}V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} \tag{3.50}$$

45. $$\sum_{i=1}^{4} S_i \geqslant \sqrt{2}r\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} \tag{3.51}$$

46. $$V \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}r^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} \tag{3.52}$$

在式(3.43)的左边，运用 $\triangle ABC$ 中的 Pólya-Szegö 不等式 $\Delta \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$，整理可得：

47. $$72V^2 \leqslant \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} \tag{3.53}$$

将式(3.51)代入式(3.43)整理，得：

48.（杨路，张景中）
$$V \leqslant \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{4}}}\left(\prod S_1\right)^{\frac{3}{8}} \tag{3.54}$$

注意到式(3.8)有 $S \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{36}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}\right)^2$，结合式(3.49)，有：

49*. $$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} V\sqrt{S} \tag{3.55}$$

在式(3.54)中,利用$\triangle ABC$中的Pólya-Szegö不等式$\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$,可得式(3.53),所以式(3.53)与式(3.54)是等价的,即:

50. $$(3.53) \Leftrightarrow (3.54) \tag{3.56}$$

51*. 当$0 < \lambda \leqslant 1$时,有

$$4 \cdot \frac{4+\lambda}{4-\lambda} \leqslant \sum \frac{S+\lambda S_1}{S-\lambda S_1} \leqslant \frac{32}{27}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 4 \tag{3.57}$$

证明 由柯西不等式

$$\sum \frac{S+\lambda S_1}{S-\lambda S_1} = \frac{2}{4-\lambda} \cdot \sum (S-\lambda S_1) \sum \frac{1}{S-\lambda S_1} - 4 \geqslant \frac{32}{4-\lambda} - 4 = 4 \cdot \frac{4+\lambda}{4-\lambda}$$

由算术-几何平均值不等式,有

$$\frac{1}{S-S_1} = \frac{1}{S_2+S_3+S_4} \leqslant \frac{1}{9}\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right)$$

等,并利用$\sum S_1 \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}R^2$,$\sum \frac{1}{S_1} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$,得到

$$\sum \frac{S+\lambda S_1}{S-\lambda S_1} = 2S\sum \frac{1}{S-\lambda S_1} - 4 \leqslant 2S\sum \frac{1}{S-S_1} - 4 \leqslant \frac{2}{3}S\sum \frac{1}{S_1} - 4 \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}R^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9r^2} - 4 \leqslant \frac{32}{27}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 4$$

52*. $$\sum \frac{m_1^2}{S_1} \geqslant \frac{32\sqrt{3}}{9} \tag{3.58}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由三角形中的Weitzenböck不等式$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta$,有

$$\sum \frac{m_1^2}{S_1} \geqslant \frac{16\sqrt{3}}{9}\sum \frac{\frac{3}{4}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 - a_{23}^2 - a_{24}^2 - a_{34}^2}{a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \sum \frac{1}{a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2}\right) - \frac{64\sqrt{3}}{9} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 16 - \frac{64\sqrt{3}}{9} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

证毕.

53*. $$9\sqrt{3}V^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{3} S_i^2 - \frac{1}{3}S_4^2\right) S_4 \tag{3.59}$$

当且仅当以 f_4 为底面的三棱锥为正三棱锥时取等号.

证明 设底面 f_4 的边长为 a,b,c，f_4 上的高为 h，a,b,c 所对应的内二面角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$，则

$$h=\frac{2S_1}{a}\sin\theta_1=\frac{2S_2}{b}\sin\theta_2=\frac{2S_3}{c}\sin\theta_3$$

所以 $$a=\frac{2S_1}{h}\sin\theta_1,b=\frac{2S_2}{h}\sin\theta_2,c=\frac{2S_3}{h}\sin\theta_3$$

在 f_4 中，由 Heron—秦九韶公式，有

$$16S_4^2=2\sum a^2b^2-\sum a^4=\frac{32}{h^4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} S_i^2S_j^2\sin^2\theta_i\sin^2\theta_j-\frac{16}{h^4}\sum_{i=1}^{3}S_i^4\sin^4\theta_i$$

$$\begin{aligned}h^4S_4^2&=\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2\sin^2\theta_i\right)^2-2\sum_{i=1}^{3}S_i^4\sin^4\theta_i\leqslant\\&\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2\sin^2\theta_i\right)^2-\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2\sin^2\theta_i\right)^2\leqslant\\&\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2\sin^2\theta_i\right)^2\end{aligned}$$

注意到射影定理：$S_4=S_1\cos\theta_1+S_2\cos\theta_2+S_3\cos\theta_3$，所以

$$\begin{aligned}\sqrt{3}h^2S_4&\leqslant\sum_{i=1}^{3}S_i^2\sin^2\theta_i=\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\sum_{i=1}^{3}S_i^2\cos^2\theta_i\leqslant\\&\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}S_i\cos\theta_i\right)^2=\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\end{aligned}$$

故 $$9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)S_4$$

54*. 若 $S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant S_4$，则

$$V\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}S_3^{\frac{3}{2}} \tag{3.60}$$

当且仅当 $S_1=S_2=S_3=\frac{\sqrt{3}}{3}S_4$ 时等号成立.

证明 $$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)^2\cdot S_4^2=\\&\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)\cdot\\&\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)\cdot\frac{2}{3}S_4^2\leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)+\frac{2}{3}S_4^2}{3}\right]^3=\frac{3}{2}\left[\frac{2\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2\right)}{3}\right]^3\leqslant 12S_3^6$$

所以
$$\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)S_4\leqslant 2\sqrt{3}\,S_3^3$$

由式(3.59),有 $9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)S_4\leqslant 2\sqrt{3}\,S_3^3$,即

$$V\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}S_3^{\frac{3}{2}}$$

55*. $$36\sqrt{3}V^2\leqslant\sum S_1^2\sum S_1-\frac{4}{3}\sum S_1^3 \tag{3.61}$$

证明 由式(3.59),有

$$9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}S_i^2-\frac{1}{3}S_4^2\right)S_4,\ 9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(S_1^2+S_2^2+S_4^2-\frac{1}{3}S_3^2\right)S_3$$

$$9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(S_1^2+S_3^2+S_4^2-\frac{1}{3}S_2^2\right)S_2,\ 9\sqrt{3}V^2\leqslant\left(S_2^2+S_3^2+S_4^2-\frac{1}{3}S_1^2\right)S_1$$

将以上四式相加,整理,即得所证. 证毕.

第四章 涉及 R 和 r 的不等式

1. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球与内切球的半径分别为 R 与 r，则

$$R \geqslant 3r \tag{4.1}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 设 O 为四面体的外心，A_i 所对的面 f_i 的面积为 S_i，点 O 到 A_i 所对的侧面 f_i 的距离为 $d_i(i=1,2,3,4)$，过顶点 A_1 的高为 h_1，则易知 $d_1+A_1O=d_1+R\geqslant h_1$，从而 $\frac{1}{3}S_1(d_1+R)\geqslant\frac{1}{3}S_1h_1=V$，即 $S_1d_1+S_1R\geqslant 3V$. 同理

$$S_2d_2+S_2R\geqslant 3V$$

$$S_3d_3+S_3R\geqslant 3V,S_4d_4+S_4R\geqslant 3V$$

以上四式相加，并注意到 $S_1d_1+S_2d_2+S_3d_3+S_4d_4=3V$，有

$$3V+R\cdot\sum_{i=1}^{4}S_i\geqslant 12V,\text{即 } R\cdot\sum_{i=1}^{4}S_i\geqslant 9V$$

因为 $3V=r\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，从而 $R\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\geqslant 3r\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，即 $R\geqslant 3r$. 易证取等号的条件. 证毕.

进一步我们还可以证明：

2.（Klamkin）设 O,I 分别为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球和内切球的球心，则

$$R^2\geqslant 9r^2+OI^2 \tag{4.2}$$

证明　设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意给定一点. 由柯西不等式有

$$\sum_{i=1}^{4} S_i \sum_{i=1}^{4} (S_i \cdot PA_i^2) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} S_i \cdot PA_i\right)^2 \tag{4.3}$$

因为

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} (S_i \cdot \overrightarrow{OA_i})}{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i} \tag{4.4}$$

从而可得

$$\sum_{i=1}^{4} S_i \cdot PA_i^2 = \sum_{i=1}^{4} S_i\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i})^2 = \sum_{i=1}^{4} S_i(R^2 + \overrightarrow{OP}^2 - 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA_i}) =$$

$$(R^2 + \overrightarrow{OP}^2 - 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI}) \sum_{i=1}^{4} S_i$$

因为

$$2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP}^2 + \overrightarrow{OI}^2 - (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI})^2$$

因此，由式(4.3)得

$$\sum_{i=1}^{4} S_i \cdot PA_i \leqslant (R^2 + PI^2 - OI^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{4} S_i \tag{4.5}$$

设 r_i 是点 P 到四面体某一侧面 f_i 的距离，则

$$PA_i \geqslant h_i - r_i$$

因此

$$\sum S_i \cdot PA_i \geqslant \sum S_i(h_i - r_i) = \sum S_ih_i - \sum S_ir_i = 4 \times 3V - 3V = 9V$$

结合式(4.4)和(4.5)并利用 $3V = rS$，可得

$$R^2 \geqslant 9r^2 + OI^2 - PI^2$$

再选取 $P = I$，立得所证不等式. 证毕.

3. 对于任意一组非零实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$，四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij} = |A_iA_j|\ (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，其外接球半径为 R，则

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_i\lambda_j a_{ij}^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\right)^2 R^2 \tag{4.6}$$

其中等号当且仅当向量 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1\,\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\,\overrightarrow{OA_2} + \lambda_3\,\overrightarrow{OA_3} + \lambda_4\,\overrightarrow{OA_4}$ 对应的点 P 与四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 重合时成立.

证明　取 P 为4点 A_1, A_2, A_3, A_4 赋予质量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 后的重心(这里的质量可认为有正有负)，则

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\lambda_1\,\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\,\overrightarrow{OA_2} + \lambda_3\,\overrightarrow{OA_3} + \lambda_4\,\overrightarrow{OA_4}|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2\,|\overrightarrow{OA_i}|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_i\lambda_j(\overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j}) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2\right) R^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_i\lambda_j(|\overrightarrow{OA_i}|^2 + |\overrightarrow{OA_j}|^2 - |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}|^2) =$$

$$(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2)R^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j(2R^2-a_{ij}^2)=$$

$$(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i)^2R^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j a_{ij}^2$$

而 $|\overrightarrow{OP}|^2\geqslant 0$，故式(4.6)获证. 当点 P 与 O 重合时等号成立. 证毕.

特别取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$，由式(4.1)得：

4.
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant 16R^2 \tag{4.7}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

5.
$$S\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2 \tag{4.8}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由 Weitznböck 不等式 $\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{12}\sum a^2$，有

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$$

6*.
$$\frac{9}{4R^2}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{4r^2} \tag{4.9}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 先证明右边不等式.

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 f_i 的半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$，由三角形中的 Walker 不等式 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4r'^2}$(其中 a,b,c 和 r' 分别为 $\triangle ABC$ 的三边长和内接圆半径)，于是

$$\frac{1}{a_{23}^2}+\frac{1}{a_{24}^2}+\frac{1}{a_{34}^2}\leqslant\frac{1}{4r_1^2},\frac{1}{a_{13}^2}+\frac{1}{a_{14}^2}+\frac{1}{a_{34}^2}\leqslant\frac{1}{4r_2^2}$$

$$\frac{1}{a_{12}^2}+\frac{1}{a_{14}^2}+\frac{1}{a_{24}^2}\leqslant\frac{1}{4r_3^2},\frac{1}{a_{12}^2}+\frac{1}{a_{13}^2}+\frac{1}{a_{23}^2}\leqslant\frac{1}{4r_4^2}$$

将以上四个不等式相加，再利用不等式(10.18)

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$$

得
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{4r_1^2}+\frac{1}{4r_2^2}+\frac{1}{4r_3^2}+\frac{1}{4r_4^2}\leqslant\frac{2}{4r^2}$$

因此
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}$$

再证明左边不等式.

由柯西不等式，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \frac{1}{a_{ij}^2} \geqslant 36$$

由不等式
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant 16R^2$$

有
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \frac{1}{a_{ij}^2} \geqslant \frac{36}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2} \geqslant \frac{36}{16R^2} = \frac{9}{4R^2}$$

证毕.

7.(第 22 届全苏竞赛题) 设四面体 $ABCD$ 的内切球半径为 r,一组对棱 $AB=a, CD=b$,则

$$r<\frac{ab}{2(a+b)} \tag{4.10}$$

证明 设四面体 $ABCD$ 的顶点 A,B,C,D 对应的高分别为 h_A,h_B,h_C,h_D,则有

$$h_A\leqslant a, h_B\leqslant a, h_C\leqslant b, h_D\leqslant b$$

因此
$$\frac{1}{h_A}\geqslant\frac{1}{a}, \frac{1}{h_B}\geqslant\frac{1}{a}, \frac{1}{h_C}\geqslant\frac{1}{b}, \frac{1}{h_D}\geqslant\frac{1}{b}$$

且以上四个不等式中至少有一个不取等号. 由性质 1.2 有

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}$$

得 $r=\dfrac{1}{\dfrac{1}{h_A}+\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_C}+\dfrac{1}{h_D}}<\dfrac{1}{\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}}=\dfrac{ab}{2(a+b)}$. 证毕.

由均值不等式 $ab\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}$,可得:

8. 条件同式(4.10),有

$$r<\frac{a+b}{8} \tag{4.11}$$

9.
$$24\sqrt{3}r^2\leqslant S\leqslant\frac{8}{\sqrt{3}}R^2 \tag{4.12}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由三角形中的 Weitzenböck 不等式 $\Delta\leqslant\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\sum a^2$,得

$$S\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 16R^2=\frac{8}{\sqrt{3}}R^2$$

注意到 $\sum\dfrac{1}{S_1}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{9r^2}$,有

$$S\geqslant\frac{16}{\sum\frac{1}{S_1}}\geqslant\frac{16}{\frac{2\sqrt{3}}{9r^2}}=24\sqrt{3}r^2\text{(证毕)}$$

10. $$\sum S_1^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4 \tag{4.13}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 设四面体 $ABCD$ 的棱长 $AB=a, CD=a', AC=b, BD=b', AD=c, BC=c'$. 注意到 $\sum (a^2+a'^2) \leqslant 16R^2$, 由式(3.11), 有

$$\sum S_1^2 \leqslant \frac{1}{48}(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2)^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4 \text{(证毕)}$$

11. $$8\sqrt{3}r^3 \leqslant V \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2 r \leqslant \frac{8}{9\sqrt{3}}R^3 \tag{4.14}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由式(4.12),(4.1)及体积公式 $V=\frac{1}{3}Sr$ 立即可得式(4.14),证毕.

12.(孔令恩)设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆半径为 r,顶点 A_i 到侧面 S_i 的高为 $h_i(1\leqslant i\leqslant 4)$, G 为其重心, G 到棱 A_iA_j 的距离为 $h_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \leqslant \frac{4}{r^2} - 8\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2} \tag{4.15}$$

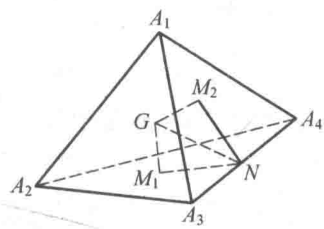


图 4.1

证明 如图 4.1 所示,设侧面 S_1, S_2 所夹二面角为 θ_{12},过重心 G 作 $GM_1 \perp S_1, GM_2 \perp S_2$,则 $GM_1=\frac{h_1}{4}, GM_2=\frac{h_2}{4}$, 作 $GN \perp A_3A_4$, 记 $\angle GNM_1=\alpha, \angle GNM_2=\beta$, 则 $\alpha+\beta=\theta_{34}$. $\frac{h_1}{4}=h_{34}\sin\alpha, \frac{h_2}{4}=h_{34}\sin\beta$,两式相加,得

$$\frac{1}{4}(h_1+h_2)=h_{34}(\sin\alpha+\sin\beta)=2h_{34}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 2h_{34}\sin\frac{\theta_{12}}{2}$$

由此即有

$$\frac{1}{4}\sqrt{h_1h_2}\leqslant h_{34}\sin\frac{\theta_{12}}{2}$$

对上式两边同乘以 $\sqrt{S_1S_2}$,并注意到 $V=\frac{1}{3}S_ih_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$\frac{3V}{4h_{34}}\leqslant\sqrt{S_1S_2}\sin\frac{\theta_{12}}{2}$$

对上式两边先平方再取和,得

$$\frac{9}{16}V^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2}=$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} =$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j - \frac{1}{4}S^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(S^2 - 2\sum_{i=1}^{4} S_i^2\right)$$

其中 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

上式两边同除以$(3V)^2$，得

$$\frac{1}{16}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\left(\frac{S}{3V}\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{(3V)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^2} - 2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}\right)$$

整理既得式(4.15)成立. 证毕.

13*. 符号同式(4.15)，则有

$$\frac{18}{R^2} \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \leqslant \frac{2}{r^2} \tag{4.16}$$

证明　注意到 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i} = \frac{1}{r}$，所以 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2} \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}\right)^2 = \frac{1}{4r^2}$，代入式(4.15)得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \leqslant \frac{2}{r^2}$$

下面再证明左边不等式. 设 l_1, l_2, l_3 分别是对棱 $A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3$ 中点的连线的长，于是

$$h_{12} \leqslant \frac{l_1}{2}, h_{34} \leqslant \frac{l_1}{2}; h_{13} \leqslant \frac{l_2}{2}, h_{24} \leqslant \frac{l_2}{2}; h_{14} \leqslant \frac{l_3}{2}, h_{23} \leqslant \frac{l_3}{2}$$

由式(1.30)，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} l_i^2 = \frac{1}{8}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant 2R^2$$

由柯西不等式，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}^2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \geqslant 36$$

故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \geqslant \frac{36}{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}^2} \geqslant \frac{18}{R^2}$$

证毕.

14*. 设 l_1, l_2, l_3 分别是对棱 $A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3$ 中点的连线长，则

$$\frac{9}{4R^2} \leqslant \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \leqslant \frac{1}{4r^2} \tag{4.17}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明　设 G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心,则 l_1 过点 G,且 $l_1 \geqslant h_{12}+h_{34}$,因此

$$\frac{1}{l_1^2} \leqslant \frac{1}{(h_{12}+h_{34})^2} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{h_{12}^2}+\frac{1}{h_{34}^2}\right)$$

同理可证

$$\frac{1}{l_2^2} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{h_{13}^2}+\frac{1}{h_{24}^2}\right)$$

$$\frac{1}{l_3^2} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{h_{14}^2}+\frac{1}{h_{23}^2}\right)$$

于是

$$\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \leqslant \frac{1}{8}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}$$

又由于式(1.30)

$$l_1^2=\frac{1}{4}(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)$$

$$l_2^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)$$

$$l_3^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)$$

得

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2) \leqslant 4R^2$$

由柯西不等式

$$(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right) \geqslant 9$$

所以

$$\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \geqslant \frac{9}{l_1^2+l_2^2+l_3^2} \geqslant \frac{9}{4R^2}$$

证毕.

15.* 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球的球心,且 O 在四面体内,$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ 分别是四面体 $OA_2A_3A_4$,$A_1OA_3A_4$,$A_1A_2OA_4$,$A_1A_2A_3O$ 外接球的半径,则

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4 \geqslant \frac{R^2}{r}+3R \qquad (4.18)$$

证明　如图 4.2 所示,设 OM 是四面体 $OA_2A_3A_4$ 外接球的直径,OM 交面 $A_2A_3A_4$ 于点 O',记 $OO'=d_1$,则 $R^2=2\rho_1 d_1$.

同理 $R^2=2\rho_2 d_2$,$R^2=2\rho_3 d_3$,$R^2=2\rho_4 d_4$.

又由式(11.20),有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i} \geqslant \frac{2}{r}+\frac{6}{R}$$

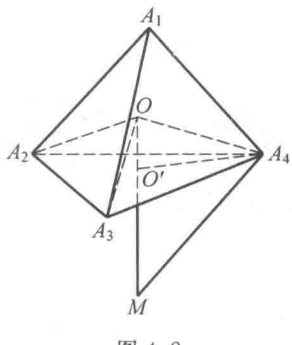


图 4.2

于是 $\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=\frac{R^2}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i}\geqslant\frac{R^2}{r}+3R$. 证毕.

注意到 $3r\leqslant R$,易知:

16*. 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球的球心,且 O 在四面体内,$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ 分别是四面体 $OA_2A_3A_4,A_1OA_3A_4,A_1A_2OA_4,A_1A_2A_3O$ 外接球的半径,则

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4\geqslant 6R \tag{4.19}$$

17*. 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球的球心,$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ 分别是四面体 $OA_2A_3A_4,A_1OA_3A_4,A_1A_2OA_4,A_1A_2A_3O$ 外接球的半径,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\rho_i^2}\leqslant\frac{16}{R^2}-\frac{128r^2}{R^4} \tag{4.20}$$

证明　如图 4.2 所示,记 $A_4O'=R_1$ 等,则 R_1 是侧面 $\triangle A_2A_3A_4$ 外接圆的半径,由式(10.21)有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i^2}\leqslant\frac{1}{2r^2}$$

由柯西不等式,有

$$\sum_{i=1}^{4}R_i^2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i^2}\geqslant 16$$

所以

$$\sum_{i=1}^{4}R_i^2\geqslant 32r^2$$

由图 4.2 知

$$d_i^2=R^2-R_i^2\quad(i=1,2,3,4)$$

故

$$R^4=4\rho_i^2(R^2-R_i^2)\quad(i=1,2,3,4)$$

于是

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\rho_i^2}=\frac{16}{R^2}-\frac{4}{R^4}\sum_{i=1}^{4}R_i^2\leqslant\frac{16}{R^2}-\frac{128r^2}{R^4}$$

证毕.

18*. 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球的球心,且点 O 在四面体内,$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ 分别是四面体 $OA_2A_3A_4,A_1OA_3A_4,A_1A_2OA_4,A_1A_2A_3O$ 外接球的半径,则

$$R^4\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^4\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \tag{4.21}$$

证明　将 $R^2=2\rho_1d_1,R^2=2\rho_2d_2,R^2=2\rho_3d_3,R^2=2\rho_4d_4$ 相乘得

$$R^8=16\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4d_1d_2d_3d_4$$

注意到式(11.1),知 $3^4d_1d_2d_3d_4\leqslant R^4$,于是有

$$R^4\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^4\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$$

证毕.

第五章 涉及四面体高线的不等式

1*. $$\frac{1}{4r^2} \leqslant \sum \frac{1}{h_1^2} \leqslant \frac{1}{2r^2} - \frac{3\sqrt[3]{3}}{4R^{\frac{4}{3}} r^{\frac{2}{3}}} \tag{5.1}$$

左边不等式当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_3$ 为等面四面体时等号成立;右边不等式当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_3$ 为正四面体时等号成立.

证明 由式(1.11)及幂平均不等式,有

$$\sum \frac{1}{h_1^2} \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum \frac{1}{h_1}\right)^2 = \frac{1}{4r^2}$$

当且仅当 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$,即 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

又由式(12.23),有$\left(\sum\limits_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}$.

由此得 $$\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \leqslant \frac{1}{2}S^2 - 9\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}} \tag{5.2}$$

由式(4.14)有 $$V \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2 r$$

由此得 $$V^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{4}{3}R^{\frac{4}{3}} r^{\frac{2}{3}} \tag{5.3}$$

于是由式(5.2),(5.3),有

$$\sum \frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{(3V)^2}\sum S_1^2 \leqslant \frac{1}{(3V)^2}\left(\frac{1}{2}S^2 - 9\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{S}{3V}\right)^2 - \frac{\sqrt[3]{3}}{V^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{1}{2r^2} - \frac{3\sqrt[3]{3}}{4R^{\frac{4}{3}} r^{\frac{2}{3}}}$$

证毕.

由式(5.1)，有不等式 $3r \leqslant R$，可得：

2*. $$\frac{1}{4r^2} \leqslant \sum \frac{1}{h_1^2} \leqslant \frac{1}{2r^2} - \frac{9}{4R^2} \tag{5.4}$$

左边不等式当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立；右边不等式当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_3$ 为正四面体时等号成立.

3*. $$\frac{1}{4r^2} + \frac{9}{8R^2} \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{1}{h_i h_j} \leqslant \frac{3}{8r^2} \tag{5.5}$$

左边不等式当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_3$ 为正四面体时等号成立；右边不等式当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

证明 由式(1.11)和不等式(5.4)，有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{1}{h_i h_j} = \frac{1}{2}\left[\left(\sum \frac{1}{h_1}\right)^2 - \sum \frac{1}{h_1^2}\right] \geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{1}{2r^2} - \frac{9}{4R^2}\right)\right] = \frac{1}{4r^2} + \frac{9}{8R^2}$$

另外，由式(1.11)和麦克劳林不等式，有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{1}{h_i h_j} \leqslant \frac{3}{8}\left(\sum \frac{1}{h_1}\right)^2 = \frac{3}{8r^2} \text{（证毕）}$$

4. $$h_1 h_2 h_3 h_4 \geqslant 256 r^4 \tag{5.6}$$

当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

证明 由式(1.15)，(1.16)及算术－几何平均值不等式

$$(rS)^4 = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot S_1 S_2 S_3 S_4 \leqslant h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \left(\frac{S}{4}\right)^4$$

所以 $$256 r^4 \leqslant h_1 h_2 h_3 h_4$$

当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立. 证毕.

5. $$64 r^2 \leqslant \sum h_1^2 \leqslant \frac{64}{9} R^2 \tag{5.7}$$

当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

证明 易知 $h_i \leqslant m_i\ (i = 1,2,3,4)$. 由式(1.29)，有

$$\sum h_1^2 \leqslant \sum m_1^2 = \frac{4}{9} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant \frac{64}{9} R^2$$

设 G 是四面体的重心，G 到四面体侧面 f_i 的距离为 $d_i\ (i = 1,2,3,4)$，则

$$d_i = \frac{1}{4} h_i \quad (i = 1,2,3,4)$$

由重心的性质，有 $d_1 S_1 = d_2 S_2 = d_3 S_3 = d_4 S_4 = \frac{3}{4} V$.

不妨设 $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$，则 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant d_4$.

由切比雪夫不等式(1.36)，有

$$\sum d_1 \sum S_1 \geqslant 4 \sum d_1 S_1 = 12V$$

所以
$$\frac{1}{4}\sum h_1 = \sum d_1 \geqslant \frac{12V}{\sum S_1} = 4r$$

故
$$\sum h_1^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum h_1\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}(16r)^2 = 64r^2$$

另证 由式(5.6),有

$$\sum h_1^2 \geqslant 4\sqrt{h_1h_2h_3h_4} \geqslant 4\sqrt{256r^4} = 64r^2$$

证毕.

6.
$$V \geqslant \frac{\sqrt{3}}{8}(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{3}{4}} \tag{5.8}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由不等式(3.54)知

$$V \leqslant \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{4}}}\left(\prod S_1\right)^{\frac{3}{8}} \tag{5.9}$$

对式(5.9)两边同乘以$(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{3}{8}}$,并运用公式$V=\frac{1}{3}S_ih_i\ (i=1,2,3,4)$,得

$$(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{3}{8}}V \leqslant \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{4}}}(3^4V^4)^{\frac{3}{8}}$$

化简得

$$(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{3}{4}} \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}V$$

证毕.

7*.
$$h_2^2h_3^2h_4^2 + h_1^2h_3^2h_4^2 + h_1^2h_2^2h_4^2 + h_1^2h_2^2h_3^2 \leqslant \frac{256}{3}V^2 \tag{5.10}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由四面体体积公式

$$V = \frac{1}{3}S_ih_i \quad (i=1,2,3,4)$$

及不等式

$$\frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2) \leqslant \prod_{i=1}^{4} S_i^2$$

于是

$$h_2^2h_3^2h_4^2 + h_1^2h_3^2h_4^2 + h_1^2h_2^2h_4^2 + h_1^2h_2^2h_3^2 =$$

$$3^6V^6\left(\frac{1}{S_2^2S_3^2S_4^2} + \frac{1}{S_1^2S_3^2S_4^2} + \frac{1}{S_1^2S_2^2S_4^2} + \frac{1}{S_1^2S_2^2S_3^2}\right) =$$

$$3^6V^2 \cdot \frac{V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)}{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2} \leqslant$$

$$3^6V^2 \cdot \frac{\frac{4^4}{3^7} \cdot S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2} = \frac{256}{3}V^2$$

证毕.

8*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径为 r,顶点 A_i 到侧面 S_i 的高为 $h_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$,则

$$2\sqrt{3}r \leqslant \frac{S_1}{h_2+h_3+h_4} + \frac{S_2}{h_1+h_3+h_4} + \frac{S_3}{h_1+h_2+h_4} + \frac{S_4}{h_1+h_2+h_3} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{R}{3r}\right)^5 R \tag{5.11}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 设 $M = \frac{S_1}{h_2+h_3+h_4} + \frac{S_2}{h_1+h_3+h_4} + \frac{S_3}{h_1+h_2+h_4} + \frac{S_4}{h_1+h_2+h_3}$,则

$$M = \frac{S_1}{\frac{3V}{S_2}+\frac{3V}{S_3}+\frac{3V}{S_4}} + \frac{S_2}{\frac{3V}{S_1}+\frac{3V}{S_3}+\frac{3V}{S_4}} + \frac{S_3}{\frac{3V}{S_1}+\frac{3V}{S_2}+\frac{3V}{S_4}} + \frac{S_4}{\frac{3V}{S_1}+\frac{3V}{S_2}+\frac{3V}{S_3}}$$

$$\frac{S_1S_2S_3S_4}{3V} \cdot \sum \frac{1}{S_2S_3+S_3S_4+S_4S_2} \geqslant \frac{S_1S_2S_3S_4}{3V} \cdot \frac{(1+1+1+1)^2}{Q}$$

其中 $Q = 2\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} S_iS_j$.

因为 $\prod\limits_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant \frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2) \geqslant \frac{3^7}{4^4}V^4 \cdot \frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4)^2$,

所以

$$\prod_{i=1}^{4} S_i \geqslant \frac{3^{\frac{7}{2}}}{4^{\frac{5}{2}}}V^2S$$

又 $$Q \leqslant \frac{3}{4}S^2, V = \frac{1}{3}rS$$

所以 $$M \geqslant \frac{3^{\frac{7}{2}}}{4^{\frac{5}{2}}}V^2S \cdot \frac{16}{3V \cdot \frac{3}{4}S^2} = 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{V}{S} = 2\sqrt{3}r$$

由麦克劳林不等式有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{1}{S_iS_j} \leqslant \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{S_i}\right)^2$$

由算术－几何平均值不等式,有

$$\frac{1}{S_2S_3} + \frac{1}{S_3S_4} + \frac{1}{S_4S_2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(S_2S_3S_4)^2}} \geqslant \frac{9}{S_2S_3+S_3S_4+S_4S_2}$$

注意到不等式$\sum \frac{1}{S_1} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$,得

$$\sum \frac{1}{S_2S_3+S_3S_4+S_4S_2} \leqslant \frac{1}{9}\sum\left(\frac{1}{S_2S_3}+\frac{1}{S_3S_4}+\frac{1}{S_4S_2}\right)=$$

$$\frac{2}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{S_iS_j} \leqslant \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{S_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{81r^4}$$

又由于$V \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r$和不等式$h_1h_2h_3h_4 \geqslant 4^4r^4$,有

$$\frac{S_1S_2S_3S_4}{3V}=\frac{(3V)^3}{h_1h_2h_3h_4} \leqslant \frac{2R^6}{3\sqrt{3}\,r}$$

故$\frac{S_1S_2S_3S_4}{3V}\cdot\sum \frac{1}{S_2S_3+S_3S_4+S_4S_2} \leqslant \left(\frac{R}{3r}\right)^5\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}$.证毕.

9*. $$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3r}{R}\right)^4 \leqslant \sum \frac{S_1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{3r}\right)^2 \tag{5.12}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 先证明右边不等式.设$h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3 \leqslant h_4$,则$\frac{1}{h_1} \geqslant \frac{1}{h_2} \geqslant \frac{1}{h_3} \geqslant \frac{1}{h_4}$,

且

$$\frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{h_1^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{h_1^2+h_2^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$$

由公式$V=\frac{1}{3}S_ih_i\ (i=1,2,3,4)$,$\sum \frac{1}{h_1}=\frac{1}{r}$及切比雪夫不等式

$$\frac{S_1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2}+\frac{S_2}{h_1^2+h_3^2+h_4^2}+\frac{S_3}{h_1^2+h_2^2+h_4^2}+\frac{S_4}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}=$$

$$3V\cdot\left[\frac{1}{h_1(h_2^2+h_3^2+h_4^2)}+\frac{1}{h_2(h_1^2+h_3^2+h_4^2)}+\frac{1}{h_3(h_1^2+h_2^2+h_4^2)}+\frac{1}{h_4(h_1^2+h_2^2+h_3^2)}\right] \leqslant$$

$$\frac{3}{4}V\sum\frac{1}{h_1}\sum\frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2}=\frac{3V}{4r}\sum\frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2}$$

由$\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_3h_1} \geqslant \frac{9}{h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1} \geqslant \frac{9}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.同理

$$\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_2h_4}+\frac{1}{h_4h_1} \geqslant \frac{9}{h_1^2+h_2^2+h_4^2}$$

$$\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_3h_4}+\frac{1}{h_4h_1} \geqslant \frac{9}{h_1^2+h_3^2+h_4^2}$$

$$\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_3h_4}+\frac{1}{h_4h_2} \geqslant \frac{9}{h_2^2+h_3^2+h_4^2}$$

又由于$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2} \geqslant \frac{9}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$等,得到

$$\sum \frac{1}{h_1^2} \geqslant \sum \frac{3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$$

因此,有$\left(\sum \frac{1}{h_1}\right)^2=\sum \frac{1}{h_1^2}+\sum\left(\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_2h_4}+\frac{1}{h_4h_1}\right)\geqslant 12\sum \frac{1}{h_1^2+h_2^2+h_4^2}$

所以
$$\sum \frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{12r^2}$$

注意到$V \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r$,我们有

$$\sum \frac{S_1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{3}{4r} \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r \cdot \frac{1}{12r^2}=\frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{3r}\right)^2$$

以下证明左边不等式. 设$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant S_4$,则

$$\begin{aligned} S_2^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_2^2 &\leqslant S_1^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_1^2 \leqslant \\ &S_1^2S_2^2+S_2^2S_4^2+S_4^2S_1^2 \leqslant \\ &S_1^2S_2^2+S_2^2S_3^2+S_3^2S_1^2 \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式,有

$$\sum S_1(S_2^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_2^2) \leqslant \frac{1}{2}\sum S_1 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i^2S_j^2$$

又
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i^2S_j^2 \leqslant \frac{3}{8}\left(\sum S_1^2\right)^2$$

由公式$V=\frac{1}{3}S_ih_i(i=1,2,3,4)$,可知

$$\begin{aligned} \sum \frac{S_1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} &= \frac{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{9V^2}\sum \frac{1}{S_1(S_2^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_2^2)} \geqslant \\ &\frac{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{9V^2} \cdot \frac{16}{\sum S_1(S_2^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_2^2)} = \\ &\frac{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{9V^2} \cdot \frac{32}{\sum S_1 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i^2S_j^2} \geqslant \\ &\frac{2^8S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{3^3V^2\sum S_1\left(\sum S_1^2\right)^2} \end{aligned}$$

因为$\prod_{i=1}^4 S_i^2 \geqslant \frac{3^7}{4^4}V^4\sum S_1^2, V \geqslant 8\sqrt{3}r^3, \sum S_1^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4$,所以

$$\begin{aligned} \sum \frac{S_1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} &\geqslant \frac{\frac{3^7}{4^4}V^4\sum S_1^2}{3^3V^2} \cdot \frac{2^8}{\sum S_1\left(\sum S_1^2\right)^2}=\frac{3^4V^2}{\sum S_1\left(\sum S_1^2\right)} \geqslant \\ &\frac{3^4 \cdot \frac{1}{3}r\sum S_1 \cdot 8\sqrt{3}r^3}{\sum S_1 \cdot \frac{16}{3}R^4}=\frac{81\sqrt{3}}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \end{aligned}$$

证毕.

10*. $$9\left(\frac{3r}{R}\right)^4 r^2 \leqslant \sum \frac{S_1^2}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \left(\frac{R}{3r}\right)^2 R^2 \tag{5.13}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 不妨设 $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$，则 $S_1^2 \leqslant S_2^2 \leqslant S_3^2 \leqslant S_4^2$，$h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3 \geqslant h_4$，所以

$$\frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \geqslant \frac{1}{h_1^2+h_3^2+h_4^2} \geqslant \frac{1}{h_1^2+h_2^2+h_4^2} \geqslant \frac{1}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$$

由切比雪夫不等式 $\sum \frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{12r^2}$ 及 $\sum S_1^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4$，有

$$\sum \frac{S_1^2}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{4}\sum S_1^2 \sum \frac{1}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \leqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3}R^4\cdot\frac{1}{12r^2} = \frac{R^4}{9r^2}$$

又由柯西不等式，有

$$\sum \frac{S_1^2}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} = \frac{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{9V^2}\sum \frac{1}{S_2^2S_3^2+S_3^2S_4^2+S_4^2S_2^2} \geqslant \frac{S_1^2S_2^2S_3^2S_4^2}{9V^2}\cdot\frac{16}{2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i^2S_j^2}$$

又因为
$$\prod_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant \frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)$$

及
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i^2S_j^2 \leqslant \frac{3}{8}\left(\sum S_1^2\right)^2$$

所以
$$\sum \frac{S_1^2}{h_2^2+h_3^2+h_4^2} \geqslant \frac{8\cdot\frac{3^7}{4^4}V^4\sum S_1^2}{9V^2\cdot\frac{3}{8}\left(\sum S_1^2\right)^2} = \frac{3^4V^2}{4\sum S_1^2} \tag{5.14}$$

注意到 $V \geqslant 8\sqrt{3}r^3$，$\sum S_1^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4$，代入式(5.14)，整理既得式(5.13)左端. 证毕.

11*. $$\sum \frac{S_1^3}{(h_2h_3h_4)^2} \geqslant \frac{27\sqrt{3}R}{128r} \tag{5.15}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 注意到 $3V = rS$，$h_i = 3V/S_i\quad(i=1,2,3,4)$

$$\sum \frac{S_1^3}{(h_2h_3h_4)^2} = \frac{1}{(3V)^6}\left(\prod_{i=1}^{4} S_i\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{4} S_i = \frac{1}{r(3V)^5}\left(\prod_{i=1}^{4} S_i\right)^2$$

利用不等式(3.43) $\prod\limits_{i=1}^{4} S_i \geqslant \frac{3^4}{2^5}\left(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot V^2$ 及式(16.11) $V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{24R}\cdot P^{\frac{2}{3}}$，

有

$$\sum \frac{S_1^3}{(h_2h_3h_4)^2} \geqslant \frac{1}{r(3V)^5} \cdot \left(\frac{3^8}{2^{10}}\right) V^4 \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^{\frac{2}{3}} \geqslant$$

$$\frac{1}{r(3V)^5} \cdot \left(\frac{3^8}{2^{10}}\right) V^4 \cdot 8\sqrt{3}RV =$$

$$\frac{27\sqrt{3}R}{128r}$$

证毕.

12*. 当 $0<\lambda\leqslant 2$ 时,有

$$\sum \frac{1}{h_1-\lambda r} \geqslant \frac{4}{4-\lambda} \cdot \frac{1}{r} \tag{5.16}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

证明 $\sum \frac{1}{h_1-\lambda r} = \sum \frac{1}{\frac{3V}{S_1}-\lambda \cdot \frac{3V}{\sum S_1}} = \sum \frac{S_1\sum S_1}{3V(\sum S_1-\lambda S_1)} =$

$$\frac{1}{r}\sum \frac{S_1}{\sum S_1-\lambda S_1} \geqslant \frac{4}{r} \cdot \frac{\frac{1}{4}\sum S_1}{\sum S_1-\frac{\lambda}{4}\sum S_1} =$$

$$\frac{4}{4-\lambda} \cdot \frac{1}{r}$$

其中"$\geqslant$"用了凸函数的性质. 证毕.

13*. 当 $0<\lambda\leqslant 2$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{h_i}{h_i-\lambda r} \geqslant \frac{16}{4-\lambda} \tag{5.17}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

证明 因为 $\sum_{i=1}^{4} \frac{h_i-\lambda r}{h_i-\lambda r} = \sum_{i=1}^{4} \frac{h_i}{h_i-\lambda r} - \lambda r\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i-\lambda r} = 4$

所以

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{h_i}{h_i-\lambda r} = \lambda r\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i-\lambda r} + 4 \geqslant \lambda r \cdot \frac{4}{4-\lambda} \cdot \frac{1}{r} + 4 = \frac{16}{4-\lambda}$$

证毕.

涉及四面体对棱距离的不等式

第六章

对于四面体 $A_1A_2A_3A_4$，本章采用约定记号：$A_1A_2=a$，$A_3A_4=a'$，$A_1A_3=b$，$A_2A_4=b'$，$A_1A_4=c$，$A_2A_3=c'$，A_1A_2 与 A_3A_4，A_1A_3 与 A_2A_4，A_1A_4 与 A_2A_3 的距离分别为 d_1，d_2，d_3. 我们把 $\omega(V)=\min\{d_1,d_2,d_3\}$ 叫作四面体的宽度.

1. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，有

$$d_1d_2d_3\leqslant 3V \tag{6.1}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 对棱垂直时取等号.

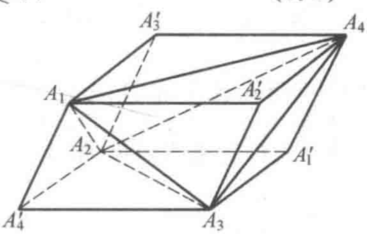


图 6.1

证明 如图 6.1 所示，过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的三组对棱分别作平行平面构成平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$，体积记为 V'，底面 $A_2A'_4A_3A'_1$ 的边 A'_4A_3 上的高为 h'，则

$$V=\frac{1}{3}V'=\frac{1}{3}|A'_4A_3|\cdot h'\cdot d_3\geqslant\frac{1}{3}d_1d_2d_3\text{(证毕)}$$

由此易知

2. $$\omega(V)\leqslant\sqrt[3]{3V} \tag{6.2}$$

3. 设 l_1，l_2，l_3 分别是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 对棱 A_1A_2，A_3A_4；A_1A_3，A_2A_4；A_1A_4，A_2A_3 中点的连线的长，则

$$3V \leqslant l_1 l_2 l_3 \tag{6.3}$$

证明 由图 6.1 易知 $l_1 = A_1A'_2, l_2 = A_1A'_3, l_3 = A_1A'_4$，所以

$$3V \leqslant A_1A'_2 \cdot A_1A'_3 \cdot A_1A'_4 = l_1 l_2 l_3$$

证毕.

4.(第 24 届全俄竞赛) 设 d 是任意四面体的对棱距离的最小值，h 是四面体的最短高的长，则

$$2d > h \tag{6.4}$$

证明 如图 6.2 所示，为确定起见，假定 h 是四面体 $ABCD$ 顶点 A 所引出的高，而 d 是棱 AB 和 CD 之间的距离，经过顶点 B 引直线 $l \parallel CD$，过点 A 作平面垂直于棱 CD，交 CD 于点 F，交 l 于点 E，于是 $\triangle AEF$ 的高 AH 和 FG 就分别等于 h 和 d.

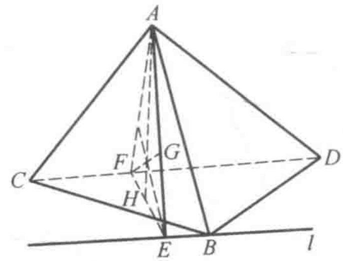


图 6.2

由于 $\triangle AEF$ 的第三条高等于四面体 $ABCD$ 的某一条高，所以其值不小于 h，因此

$$AF \leqslant EF, \text{且} \frac{h}{d} = \frac{AH}{FG} = \frac{AE}{EF} < \frac{AF + FE}{FE} \leqslant 2$$

此即为：

5. $$\omega(V) > \frac{1}{2}\min\{h_i \mid i = 1,2,3,4\} \tag{6.5}$$

可以证明系数 $\frac{1}{2}$ 是最佳的.

6*. 对任意四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 均有

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{d_k^2} \geqslant \frac{1}{4r^2} \tag{6.6}$$

当且仅当四面体为等面四面体时等号成立.

为此，先证明一个引理.

过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的三组对棱分别作平行平面构成平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$，如图 6.1. 记 $S_{\square A_1A'_3A_2A'_4} = T_1, S_{\square A_1A'_2A_3A'_4} = T_2, S_{\square A_1A'_2A_4A'_3} = T_3$，并记平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$ 的体积为 V'.

引理 6.1 对任意四面体 $A_1A_2A_3A_4$，有

(1) $$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 \tag{6.7}$$

(2) $$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} \tag{6.8}$$

证明 记 $A_1A'_3 = x, A_1A'_4 = y, A_1A'_2 = z$，则 $a^2 + a'^2 = 2(x^2 + y^2), b^2 + b'^2 = 2(y^2 + z^2), c^2 + c'^2 = 2(z^2 + x^2)$，于是有

$$x^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)$$

$$y^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2),z^2=\frac{1}{4}(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)$$

在 $\triangle A_1A_2A'_4$ 和 $\triangle A_1A'_3A'_4$ 中，由 Heron—秦九韶公式，有

$$16\left(\frac{T_1}{2}\right)^2=16S^2_{\triangle A_1A_2A'_4}=-x^4-y^4-a^4+2x^2y^2+2x^2a^2+2y^2a^2$$

$$16\left(\frac{T_1}{2}\right)^2=16S^2_{\triangle A_1A'_3A'_4}=-x^4-y^4-a'^4+2x^2y^2+2x^2a'^2+2y^2a'^2$$

两式相加变形，有

$$\begin{aligned}16T_1^2=&-4(x^4+y^4)-2(a^4+a'^4)+8x^2y^2+4(x^2+y^2)(a^2+a'^2)=\\&-4(x^2+y^2)^2-2(a^4+a'^4)+16x^2y^2+4(x^2+y^2)(a^2+a'^2)=\\&-4\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\right)^2-2(a^4+a'^4)+4\cdot\frac{a^2+a'^2}{2}(a^2+a'^2)+16x^2y^2=\\&-a^4-a'^4+2a^2a'+16x^2y^2\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}x^2y^2=&\frac{1}{16}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)=\\&\frac{1}{16}[2(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)+(a^2+a'^2)^2-(b^2+b'^2)^2-(c^2+c'^2)^2]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}16T_1^2=&-a^4-a'^4+2a^2a'^2+2(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)+\\&(a^2+a'^2)^2-(b^2+b'^2)^2-(c^2+c'^2)^2\end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{aligned}16T_2^2=&-b^4-b'^4+2b^2b'^2+2(c^2+c'^2)(a^2+a'^2)+\\&(b^2+b'^2)^2-(c^2+c'^2)^2-(a^2+a'^2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16T_3^2=&-c^4-c'^4+2c^2c'^2+2(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)+\\&(c^2+c'^2)^2-(a^2+a'^2)^2-(b^2+b'^2)^2\end{aligned}$$

上述三式相加，有

$$\begin{aligned}16(T_1^2+T_2^2+T_3^2)=&-\sum(a^4+a'^4)+2\sum a^2a'^2+2\sum(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)-\\&\sum(a^2+a'^2)^2=-2\sum(a^4+a'^4)+\\&2\sum(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)\end{aligned}\tag{6.9}$$

（“$\sum$”表示循环和，下同）.

另外，在 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ 中，由 Heron—秦九韶公式，有

$$16S_1^2=-a'^4-b'^4-c'^4+2(a'^2b'^2+b'^2c'^2+c'^2a'^2)$$
$$16S_2^2=-a'^4-b^4-c^4+2(a'^2b^2+b^2c^2+c^2a'^2)$$
$$16S_3^2=-a^4-b'^4-c^4+2(a^2b'^2+b'^2c^2+c^2a^2)$$
$$16S_4^2=-a^4-b^4-c'^4+2(a^2b^2+b^2c'^2+c'^2a^2)$$

上述四式相加并整理,得

$$16(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)=-2\sum(a^4+a'^4)+2\sum(b^2+b'^2)(c^2+c'^2) \tag{6.10}$$

由式(6.9),(6.10)可知式(6.7)成立.

由式(6.7)易知式(6.8)成立.

式(6.6)证明 在平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$ 中,易知 $d_1T_1=d_2T_2=d_3T_3=V'$,所以

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{T_1^2+T_2^2+T_3^2}{V'^2}=\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2}{9V^2}=$$
$$\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2}{(S_1+S_2+S_3+S_4)^2r^2}\geqslant\frac{1}{4r^2}$$

由上述的证明过程可知当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

作为式(5.7)的应用,我们给出:

7. $$\sum S_1^2\leqslant\frac{1}{4}(a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2) \tag{6.11}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 $$\sum S_1^2=\sum T_1^2=\frac{1}{4}[(aa'\sin\alpha)^2+(bb'\sin\beta)^2+(cc'\sin\gamma)^2]\leqslant$$
$$\frac{1}{4}[(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2]$$

其中 α,β,γ 分别是对棱 $A_1A_2,A_3A_4;A_1A_3,A_2A_4;A_1A_4,A_2A_3$ 的夹角.

8. $$\sum S_1^2\leqslant l_1^2l_2^2+l_2^2l_3^2+l_1^2l_3^2 \tag{6.12}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 $$\sum S_1^2=\sum T_1^2=(l_1l_2\sin\theta)^2+(l_2l_3\sin\phi)^2+(l_3l_1\sin\varphi)^2\leqslant$$
$$(l_1l_2)^2+(l_2l_3)^2+(l_3l_1)^2$$

其中 θ,ϕ,φ 分别是 $l_1,l_2;l_2,l_3;l_3,l_1$ 的夹角.

由式(6.8)易知:

9. $$\omega(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{4}{\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}}} \tag{6.13}$$

10. $$\omega(V)\leqslant2\sqrt{3}r \tag{6.14}$$

证明 设 $T_1=\max\{T_1,T_2,T_3\}$，由引理 6.1 知

$$3T_1^2 \geqslant T_1^2+T_2^2+T_3^2 \geqslant \frac{1}{4}S^2$$

所以
$$2\sqrt{3}\cdot\frac{3V}{S} \geqslant \frac{V'}{T_1}$$

即
$$\omega(V) \leqslant 2\sqrt{3}r \tag{6.15}$$

由著名不等式 $3r \leqslant R$ 易得：

11.
$$\omega(V) \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}R \tag{6.16}$$

12.（唐立华）设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 三组对棱间距离分别为 d_1,d_2,d_3，P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，记 $PA_i=R_i(i=1,2,3,4)$. 则

$$\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{3}d_i^2 \tag{6.17}$$

当且仅当四面体为等面四面体，且点 P 为该四面体外心时取等号.

先给出两个引理.

引理 6.2 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 对棱 $A_1A_2=a$，$A_3A_4=a'$，A_1A_2 与 A_3A_4，A_1A_3 与 A_2A_4，A_1A_4 与 A_2A_3 的距离分别为 d_1,d_2,d_3，则

$$aa' \geqslant d_2^2+d_3^2 \tag{6.18}$$

当且仅当 $A_1A_2=A_3A_4$，$A_1A_3=A_2A_4$，$A_1A_4=A_2A_3$ 时，式(6.18)取等号.

证明 如图 6.3 所示，过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的三组对棱分别作平行平面构成平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$.

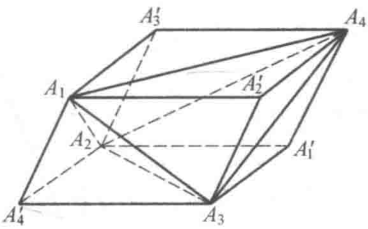


图 6.3

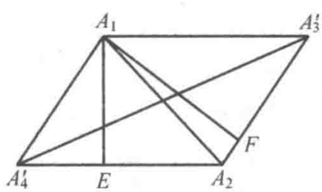


图 6.4

考虑侧面 $A_1A'_4A_2A'_3$，如图 6.4 所示. $A_1A_2=a$，$A'_3A'_4=a'$.

作 $A_1E\perp A_2A'_4$ 于点 E，$A_1F\perp A_2A'_3$ 于点 F，记 $\angle A'_3A'_4A_2=\alpha$，$\angle A'_4A_2A_1=\beta$，$\angle A'_3A'_4A_1=\phi$，$\angle A'_4A_1A_2=\varphi$，则 $(\alpha+\beta)+(\phi+\varphi)=\pi$. 易知

$$d_2 \leqslant A_1F,\ d_3 \leqslant A_1E$$

而
$$A_1E=a\sin\beta=a'\sin\alpha,\ A_1F=a\sin\varphi=a'\sin\phi$$

于是

$$d_2^2+d_3^2 \leqslant A_1F^2+A_1E^2=aa'(\sin\phi\sin\varphi+\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$aa'\left[-\frac{1}{2}(\cos(\phi+\varphi)-\cos(\phi-\varphi))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))\right]=$$

$$aa'\left[\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\phi-\varphi))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\phi+\varphi))\right]=$$

$$aa'\ \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\phi-\varphi)]\leqslant aa'$$

引理6.3　设四面体$A_1A_2A_3A_4$的对棱$A_1A_2=a, A_3A_4=a'$，A_1A_2与A_3A_4的距离为d_1，则

$$\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2\geqslant(a+a')^2+4d_1^2 \tag{6.19}$$

当且仅当$A_1A_2=A_3A_4$，A_1A_3与A_2A_4的中点连线为异面直线A_1A_2与A_3A_4的公垂线段，且过点P时式(6.18)取等号.

证明　在$\triangle A_1PA_2$与$\triangle A_3PA_4$中，记$\angle A_1PA_2=\alpha$，$\angle A_3PA_4=\beta$，它们的角平分线长记作t_1,t_2，则

$$t_1\leqslant\sqrt{R_1R_2}\cos\frac{\alpha}{2}, t_2\leqslant\sqrt{R_3R_4}\cos\frac{\beta}{2}$$

且$d_1\leqslant t_1+t_2$.

再应用简单的代数不等式

$$\sqrt{x_1^2-y_1^2}+\sqrt{x_2^2-y_2^2}\leqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2}$$

其中$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{R}^*$，$x_1\geqslant y_1$，$x_2\geqslant y_2$，既得

$$\begin{aligned}a+a'&=\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\alpha}+\sqrt{R_3^2+R_4^2-2R_3R_4\cos\beta}=\\&\sqrt{(R_1+R_2)^2-4R_1R_2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\\&\sqrt{(R_3+R_4)^2-4R_3R_4\cos^2\frac{\beta}{2}}\leqslant\\&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2-4\left(\sqrt{R_1R_2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{R_3R_4}\cos\frac{\beta}{2}\right)^2}\leqslant\\&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2-4(t_1+t_2)^2}\leqslant\\&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2-4d_1^2}\end{aligned}$$

由此既得式(6.19). 由以上的证明知，式(6.18)取等号的条件为：$\frac{R_1+R_2}{R_3+R_4}=\frac{\sqrt{R_1R_2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R_3R_4}\cos\frac{\beta}{2}}$，$R_1=R_2$，$R_3=R_4$，$\alpha$与$\beta$的角平分线与$A_1A_2$，$A_3A_4$的公垂线段重

合.

也就是当且仅当 $A_1A_2=A_3A_4$，A_1A_2 与 A_3A_4 的中点连线为异面直线 A_1A_2 与 A_3A_4 的公垂线段且过点 P 时，式(6.19)取等号.

由(6.18)，(6.19)两式易证式(6.16). 事实上，有

$$\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2\geqslant(a+a')^2+4d_1^2\geqslant 4ab+4d_1^2\geqslant 4(d_2^2+d_3^2)+4d_1^2$$

由上证明及式(6.18)，(6.19)取等号的条件知 $A_1A_2=A_3A_4$，$A_1A_3=A_2A_4$，$A_1A_4=A_2A_3$，且点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心时，式(6.17)取等号.

由引理 6.2 易知：

13. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记 $A_1A_2=a$，$A_3A_4=a'$，$A_1A_3=b$，$A_2A_4=b'$，$A_1A_4=c$，$A_2A_3=c'$，则

$$\omega(V)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\min\{\sqrt{aa'},\sqrt{bb'},\sqrt{cc'}\}\tag{6.20}$$

14. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 三组对棱间距离分别为 d_1,d_2,d_3，中线长为 m_1，m_2,m_3,m_4，则

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}(d_1+d_2+d_3)\leqslant\sum_{i=1}^{4}m_i\tag{6.21}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明　取 P 为重心，注意到 $R_i=\frac{3}{4}m_i(i=1,2,3,4)$，由不等式(6.17)得

$$\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4}m_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2\geqslant 4\sum_{i=1}^{3}d_i^2\geqslant\frac{4}{3}(d_1+d_2+d_3)^2$$

由此既得式(6.21).

由此易知：

15.
$$\omega(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{8}\sum_{i=1}^{4}m_i\tag{6.22}$$

16.
$$2\sqrt{2}\sum d_1\leqslant\sum(a+a')\tag{6.23}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证法一. 先证明一个引理.

引理 6.4　平行四边形对角线之和不小于两组对边距离之和的 $\sqrt{2}$ 倍，当且仅当四边形为正方形时取等号.

证明　如图 6.5 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，作 $AM\perp BC$ 于点 M，$AN\perp CD$ 于点 N，在 BC 上截取 $ME=BM$，联结 DM，DE，AE. 易知 $AE=AB$，$AC=DE$.

于是　$AC+BD=DE+BD\geqslant 2DM=2\sqrt{AM^2+AD^2}\geqslant$

$$2\sqrt{AM^2+AN^2} \geqslant \sqrt{2}\,(AM+AN)$$

其中第一个"$\geqslant$"中，等号成立当且仅当 B,M,E 三点重合，即 $\angle ABC=90°$，此时 D,N 两点也重合，第二个"$\geqslant$"中等号也成立，第三个"$\geqslant$"中等号成立当且仅当 $AM=AN$，即四边形为正方形时. 证毕.

式(6.23)的证明　如图 6.6 所示，作四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接平行六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$，记 A_1A_2 与 A_3A_4 的距离为 d_1，A_1A_3 与 A_2A_4 的距离为 d_2，A_1A_4 与 A_2A_3 的距离为 d_3.

于是 $d_1 \leqslant d(A_1A'_3, A'_2A_4)$，$d_2 \leqslant d(A_1A'_2, A'_3A_4)$（其中 d 表示距离，下同）.

所以，由引理 6.4，得

$$\sqrt{2}\,(d_1+d_2) \leqslant \sqrt{2}\,[d(A_1A'_3, A'_2A_4)+d(A_1A'_2, A'_3A_4)] \leqslant A_1A_4 + A'_2A'_3 = A_1A_4 + A_2A_3$$

同理 $\sqrt{2}\,(d_1+d_3) \leqslant A_1A_3 + A_2A_4$，$\sqrt{2}\,(d_2+d_3) \leqslant A_1A_2 + A_3A_4$. 以上三式相加既得式(6.23). 由引理 6.4 及以上证明可知，当六面体 $A_1A'_2A_4A'_3\text{-}A'_4A_3A'_1A_2$ 为正方体时式(6.23)取等号. 证毕.

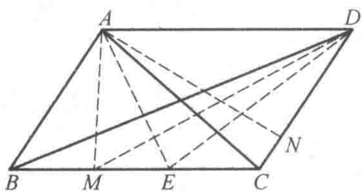


图 6.5

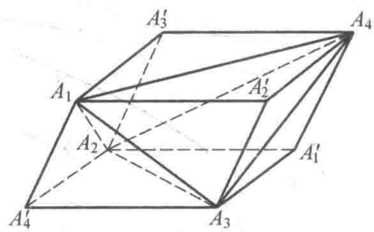


图 6.6

证法二(樊益武)　由引理 6.2，$d_2^2+d_3^2 \leqslant aa'$，得

$$2\,(d_2+d_3)^2 \leqslant (a+a')^2$$

所以

$$\sqrt{2}\,(d_2+d_3) \leqslant a+a'$$

以下证明同证法一.

17.

$$\sum d_1^2 \geqslant \frac{36R^2r^2}{2R^2-9r^2} \tag{6.24}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_3$ 为正四面体时取等号.

证明　由式(5.4)及式(6.8)有

$$\sum \frac{1}{d_1^2} \leqslant \frac{1}{2r^2} - \frac{9}{4R^2}$$

所以 $\sum d_1^2 \geqslant \dfrac{9}{\sum \dfrac{1}{d_1^2}} \geqslant \dfrac{36R^2r^2}{2R^2-9r^2}$. 证毕.

涉及旁切球半径、高和R,r的不等式

第七章

先给出两个引理.

引理 7.1　在四面体$A_1A_2A_3A_4$中,有

$$r_i=\frac{h_ir}{h_i-2r}\quad(i=1,2,3,4)\tag{7.1}$$

证明　设四面体内切球球心为I,顶点A_i的对面上旁切球的球心为I_i,则

$$\frac{r}{r_i}=\frac{h_i-r}{h_i+r_i}$$

整理既得式(7.1).

引理 7.2　对任意正数$x_i(i=1,2,3,4)$,其中任三个数之和大于另一个数,$k\geqslant\frac{1}{2}$,有

$$\sum\left(\frac{x_i}{\sum x_j-2x_i}\right)^k\geqslant\frac{4}{2^k}\tag{7.2}$$

当$x_1=x_2=x_3=x_4$时取等号.

证明　因为　$0<2x_i\left(\sum x_j-2x_i\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sum x_j\right)^2$

所以　$$\frac{x_i}{\sum x_j-2x_i}\geqslant 8\left(\frac{x_i}{\sum x_j}\right)^2\quad(i=1,2,3,4)$$

因此

$$\sum\left[\frac{x_i}{\sum x_j-2x_i}\right]^k\geqslant 8^k\sum\left[\frac{x_i}{\sum x_j}\right]^{2k}\geqslant 8^k\times 4\left[\frac{1}{4}\sum\frac{x_i}{\sum x_j}\right]^{2k}=\frac{4}{2^k}$$

1*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,当 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{r_i}{h_i}\right)^k\geqslant\frac{4}{2^k}\tag{7.3}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

证明 注意到 $S_ih_i=3V$, $r\sum S_1=3V$ 及式(7.1),得

$$\frac{r_i}{h_i}=\frac{r}{h_i-2r}=\frac{S_i}{\sum S_1-2S_i}\quad(i=1,2,3,4)$$

有

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{r_i}{h_i}\right)^k=\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{S_i}{\sum S_1-2S_i}\right]^k\geqslant\frac{4}{2^k}$$

由于$\frac{r_i}{h_i}=\frac{r}{h_i-2r}(i=1,2,3,4)$.易知:

2*. 当 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(h_i-2r)^k}\geqslant\frac{4}{2^kr^k}\tag{7.4}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

3*. $$2\leqslant\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{h_i}\leqslant 4\left(\frac{R}{3r}\right)^2-2\tag{7.5}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

证明 这里仅证明右边不等式.由式(10.24)得

$$\sum r_1\leqslant\frac{8}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R$$

于是
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{h_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i}{S-2S_i}=\frac{S}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{S-2S_i}-2=$$
$$\frac{1}{2r}\sum r_1-2\leqslant\frac{1}{2r}\cdot\frac{8}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R-2=4\left(\frac{R}{3r}\right)^2-2$$

证毕.

4*. 当 $k\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{h_i}{r_i}\right)^k\geqslant 4\cdot 2^k\tag{7.6}$$

当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时取等号.

证明 由幂平均不等式

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{h_i}{r_i}\right)^k=\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\sum S_1-2S_i}{S_i}\right]^k\geqslant 4\cdot\frac{1}{4^k}\left[\sum_{i=1}^{4}\frac{\sum S_1-2S_i}{S_i}\right]^k=$$

$$4\cdot\frac{1}{4^k}\left(\sum S_1\sum\frac{1}{S_1}-8\right)^k\geqslant 4\cdot\frac{1}{4^k}(16-8)^k=4\cdot 2^k$$

5*.
$$8\leqslant\sum_{i=1}^{4}\frac{h_i}{r_i}\leqslant 16\left(\frac{R}{3r}\right)^2-8 \tag{7.7}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明　这里仅证明右边不等式.注意到$\sum S_1\leqslant\frac{8}{\sqrt{3}}R^2$,$\sum\frac{1}{S_1}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{h_i}{r_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\sum S_1-2S_i}{S_i}=\sum S_1\sum\frac{1}{S_1}-8\leqslant$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}}R^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9r^2}-8=\left(\frac{4R}{3r}\right)^2-8$$

6*.
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-r}\geqslant 3\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i-r} \tag{7.8}$$

当$S_1=S_2=S_3=S_4$时取等号.

证明　$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-r}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{h_i}{2r}-1\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\sum S_1}{S_i}-4\right]=$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}S_i\sum_{j\neq i}^{4}\frac{1}{S_j}-2\right)$$

$$3\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i-r}=\frac{3}{r}\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i}{\sum S_1-S_i}\leqslant\frac{1}{3r}\sum_{i=1}^{4}\left(S_i\sum_{j\neq i}^{4}\frac{1}{S_j}\right)$$

所以,欲证式(7.8),只需证

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}S_i\sum_{j\neq i}^{4}\frac{1}{S_j}-2\geqslant\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\left(S_i\sum_{j\neq i}^{4}\frac{1}{S_j}\right)$$

即
$$\sum_{i=1}^{4}\left(S_i\sum_{j\neq i}^{4}\frac{1}{S_j}\right)\geqslant 12 \tag{7.9}$$

由$\sum S_1\sum\frac{1}{S_1}\geqslant 16$变形可得式(7.9).证毕.

猜想　当$0\leqslant\lambda\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-\lambda r}\geqslant\frac{4-\lambda}{2-\lambda}\sum\frac{1}{h_i-\lambda r}$$

当$S_1=S_2=S_3=S_4$时取等号.

7*.
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{m_1}\leqslant\frac{1}{r} \tag{7.10}$$

证明 由式(7.1),得$\frac{1}{r_1}+\frac{2}{h_1}=\frac{1}{r}$.

又因为$h_1\leqslant m_1$,所以$\frac{1}{m_1}\leqslant\frac{1}{h_1}$,所以$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{m_1}\leqslant\frac{1}{r_1}+\frac{2}{h_1}=\frac{1}{r}$. 证毕.

8*. 当$0<\lambda\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-\lambda r}\geqslant\frac{4}{2-\lambda}\cdot\frac{1}{r}\tag{7.11}$$

当$S_1=S_2=S_3=S_4$时取等号.

证明 $$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-\lambda r}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{4}\frac{h_i-2r}{(1-\lambda)h_i+2\lambda r}=$$

$$\frac{1}{r}\cdot\sum\frac{\sum S_1-2S_i}{(1-\lambda)\sum S_1+2\lambda S_i}\geqslant\frac{4}{2-\lambda}\cdot\frac{1}{r}$$

9*. $$\sum\frac{h_1-r_1}{h_1+r_1}\leqslant\frac{4}{3}\tag{7.12}$$

当$S_1=S_2=S_3=S_4$时取等号.

证明 $$h_1+r_1=\frac{3V}{S_1}+\frac{3V}{S_2+S_3+S_4-S_1}=\frac{3V(S_2+S_3+S_4)}{S_1(S_2+S_3+S_4-S_1)}$$

同理 $$h_1-r_1=\frac{3V(S_2+S_3+S_4-2S_1)}{S_1(S_2+S_3+S_4-S_1)}$$

所以 $$\frac{h_1-r_1}{h_1+r_1}=\frac{S_2+S_3+S_4-2S_1}{S_2+S_3+S_4}$$

于是 $$\sum\frac{h_1-r_1}{h_1+r_1}=\sum\frac{S_2+S_3+S_4-2S_1}{S_2+S_3+S_4}=4-2\sum\frac{S_1}{S_2+S_3+S_4}=$$

$$12-2\sum S_1\sum\frac{1}{S_2+S_3+S_4}=$$

$$12-\frac{2}{3}\sum(S_2+S_3+S_4)\sum\frac{1}{S_2+S_3+S_4}\leqslant$$

$$12-\frac{2}{3}\times 16=\frac{4}{3}$$

证毕.

10*. 当$0<\lambda\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{r_i-\lambda r}\geqslant\frac{8}{2-\lambda}\tag{7.13}$$

当且仅当$S_1=S_2=S_3=S_4$时等号成立.

证明 $$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i-\lambda r}{r_i-\lambda r}=\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{r_i-\lambda r}-\lambda r\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-\lambda r}=4$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{r_i-\lambda r}=\lambda r\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i-\lambda r}+4\geqslant\lambda r\cdot\frac{4}{2-\lambda}\cdot\frac{1}{r}+4=\frac{8}{2-\lambda}$$

11*. $$12\sqrt{3}r \leqslant \sum \frac{S_1}{r_1} \leqslant \frac{4R^2}{\sqrt{3}r} \tag{7.14}$$

当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

证明 由式(1.13)及(12.22)得

$$\sum \frac{S_1}{r_1} = \sum \frac{S_1(S-2S_1)}{3V} = \frac{S^2 - 2\sum S_1^2}{3V} \geqslant \frac{18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}}{3V} = 6\sqrt[3]{3}V^{\frac{1}{3}} \geqslant$$

$$6\sqrt[3]{3} \cdot (8\sqrt{3}r^3)^{\frac{1}{3}} = 12\sqrt{3}r$$

又由均值不等式及式(4.12)可得

$$\sum \frac{S_1}{r_1} = \sum \frac{S_1(S-2S_1)}{3V} = \sum \frac{2S_1(S-2S_1)}{6V} \leqslant$$

$$\sum \frac{\left(\frac{S}{2}\right)^2}{6V} = \frac{S^2}{6V} = \frac{S}{2r} \leqslant \frac{4R^2}{\sqrt{3}r}$$

12*. $$\frac{18}{\sqrt[3]{3V}} \leqslant \sum \frac{S_1}{r_2 r_3 r_4} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{R}{3r}\right)^2 \frac{1}{r} \tag{7.15}$$

当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

先证两个引理.

引理 7.3 对任意正数 $0 < x_i < \frac{1}{2}(i=1,2,3,4)$，且 $\sum x_1 = 1$，则

$$\sum x_1(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) \leqslant \frac{1}{32} \tag{7.16}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 时取等号.

证明 (用逐步调整法)不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$，则 $0 < x_1 \leqslant \frac{1}{4}$，$\frac{1}{4} \leqslant x_4 < \frac{1}{2}$. 若 $x_1 = \frac{1}{4}$，则 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$，式(7.16)显然成立. 当 $0 < x_1 < \frac{1}{4}$ 时，$\frac{1}{4} < x_4 < \frac{1}{2}$. 令 $y_1 = \frac{1}{4}$，$y_4 = x_1 + x_4 - \frac{1}{4}$，$y_2 = x_2$，$y_3 = x_3$，则 $x_1 + x_4 = y_1 + y_4$，$y_1 y_4 - x_1 x_4 = \left(\frac{1}{4} - x_1\right)\left(x_4 - \frac{1}{4}\right) > 0$.

令
$$\begin{aligned} f(x) = \sum x_1(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) = \\ (1-2x_2)(1-2x_3)(x_1+x_4-4x_1x_4) + \\ (x_2+x_3-4x_2x_3)(1-2x_1)(1-2x_4) \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} \Delta f = f(x) - f(y) = (1-2x_2)(1-2x_3)(4y_1y_4 - 4x_1x_4) + \\ (x_2+x_3-4x_2x_3)(4x_1x_4 - 4y_1y_4) = \\ 4(y_1y_4 - x_1x_4)[-3(x_2+x_3)+8x_2x_4] \end{aligned}$$

由均值不等式，有

$$-3(x_2+x_3)+8x_2x_3 \leqslant -3(x_2+x_3)+8\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2=$$
$$-3(x_2+x_3)+2(x_2+x_3)^2=$$
$$(x_2+x_3)[2(x_2+x_3)-3]<0$$

所以 $\Delta f \leqslant 0$,即 $f(x) \leqslant f(y)$. 这样,最多经过三次调整,得 $f(x) \leqslant f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{32}$. 证毕.

在式(7.16)中,令 $x_i=\frac{S_i}{S}(i=1,2,3,4)$,得:

引理 7.4 $$\sum S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4) \leqslant \frac{1}{32}S^4 \tag{7.17}$$

式(7.15)的证明 先证右边不等式.

由性质 1.4 及式(4.8),有 $r_i=\frac{3V}{S-2S_i}$ 及 $S \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$,注意到 $V=\frac{1}{3}Sr$,得

$$\sum \frac{S_1}{r_2r_3r_4}=\frac{1}{27V^3}\sum S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4) \leqslant$$
$$\frac{1}{27V^3}\cdot\frac{S^4}{32}=\frac{S}{32r^3} \leqslant \frac{R^2}{4\sqrt{3}\,r^3}$$

再证左边不等式.

在式(12.20)中,令 $x_i=\frac{S_i}{S}(i=1,2,3,4)$,得

$$\sum S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4) \geqslant 32S_1S_2S_3S_4 \tag{7.18}$$

并利用式(2.59),有

$$\sum \frac{S_1}{r_2r_3r_4}=\frac{1}{27V^3}\sum S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4) \geqslant$$
$$\frac{1}{27V^3}\cdot 32S_1S_2S_3S_4 \geqslant \frac{32}{27V^3}\cdot\frac{3^{\frac{14}{3}}}{16}V^{\frac{8}{3}}=\frac{18}{\sqrt[3]{3V}}$$

13*. $$\sum \frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4} \geqslant 32 \tag{7.19}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证法一 注意到,由式(7.18),得

$$\sum \frac{1}{h_1r_2r_3r_4} \geqslant \frac{32}{h_1h_2h_3h_4}$$

变形即可得式(7.19). 证毕.

证法二 由式(2.49)有

$$\sum \frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}=\sum \frac{(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)}{S_2S_3S_4}=$$

$$\sum\left(\frac{S}{S_2}-2\right)\left(\frac{S}{S_3}-2\right)\left(\frac{S}{S_4}-2\right)\geqslant 32$$

14*. $$\sum\frac{r_2r_3r_4}{h_2h_3h_4}\geqslant\frac{1}{2}\tag{7.20}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 令

$$\begin{cases}S_2+S_3+S_4-S_1=a\\S_1+S_3+S_4-S_2=b\\S_1+S_2+S_4-S_3=c\\S_1+S_2+S_3-S_4=d\end{cases}$$

记 $s=a+b+c+d$,解得

$$\begin{cases}S_1=\dfrac{1}{4}(s-2a)\\[2mm]S_2=\dfrac{1}{4}(s-2b)\\[2mm]S_3=\dfrac{1}{4}(s-2c)\\[2mm]S_4=\dfrac{1}{4}(s-2d)\end{cases}$$

于是

$$\sum\frac{r_2r_3r_4}{h_2h_3h_4}=\sum\frac{S_2S_3S_4}{(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)}=$$

$$\frac{1}{4^3}\sum\frac{(s-2b)(s-2c)(s-2d)}{bcd}=$$

$$\frac{1}{4^3}\sum\left(\frac{s}{b}-2\right)\left(\frac{s}{c}-2\right)\left(\frac{s}{d}-2\right)\geqslant\frac{1}{4^3}\cdot 32=\frac{1}{2}$$

后边“$\geqslant$ ”运用了式(12.20). 证毕.

15*. $$\sum\frac{r_2r_3r_4}{S_1}\geqslant\frac{256\sqrt{3}r^3}{R^2}\tag{7.21}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 因为$\sum\frac{S_1}{r_2r_3r_4}\sum\frac{r_2r_3r_4}{S_1}\geqslant 16$,所以

$$\sum\frac{r_2r_3r_4}{S_1}\geqslant\frac{16}{\sum\dfrac{S_1}{r_2r_3r_4}}\geqslant\frac{16}{\dfrac{R^2}{16\sqrt{3}r^3}}=\frac{256\sqrt{3}r^3}{R^2}$$

16. $$r_1r_2r_3r_4\geqslant 16r^4\tag{7.22}$$

当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 由性质 1.4 及算术 — 几何平均值不等式,得

$$(rS)^4 = r_1 r_2 r_3 r_4 (S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4) \leqslant r_1 r_2 r_3 r_4 \left(\frac{S}{2}\right)^4$$

于是有
$$r_1 r_2 r_3 r_4 \geqslant 16r^4$$
当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

17*. $$8r^2 \leqslant h_i r_i \leqslant \frac{8}{9}R^2 \quad (i=1,2,3,4) \tag{7.23}$$

证明 由式(7.1),得
$$\frac{2}{h_i} + \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r}$$

于是,有
$$\frac{1}{r} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{h_i r_i}}$$
变形可得式(7.23)左端不等式.

注意到 $S \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}R^2$,由式(10.24)的证明有
$$h_1 r_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}S \leqslant \frac{8}{9}R^2$$
由此得右端不等式.证毕.

18*. $$24 \leqslant \sum \frac{h_2+h_3+h_4}{r_1} \leqslant \frac{32R}{3r} - 8 \leqslant 16\left(\frac{R}{3r}\right)^2 + 8 \tag{7.24}$$
当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由引理 7.1 及 $V = \frac{1}{3}S_i h_i\ (i=1,2,3,4)$ 得
$$\begin{aligned}\sum \frac{h_2+h_3+h_4}{r_1} = {} & \frac{1}{r}\sum (3V - 2rS_1)\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right) = \\ & \frac{3V}{r}\sum\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right) - 2\sum S_1\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4}\right) = \\ & \sum S_1 \sum \frac{1}{S_1} + 8 \geqslant \\ & 16 + 8 = 24\end{aligned}$$

又因为 $\sum S_1 \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}R^2$,$\sum \frac{1}{S_1} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$,所以
$$\sum \frac{h_2+h_3+h_4}{r_1} = \sum S_1 \sum \frac{1}{S_1} + 8 \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}R^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9r^2} + 8 = \left(\frac{4R}{3r}\right)^2 + 8$$

另外,$\sum \frac{h_2+h_3+h_4}{r_1} = \sum h_1 \sum \frac{1}{r_1} - \sum \frac{h_1}{r_1} = \frac{2}{r}\sum h_1 - \sum \frac{h_1}{r_1}$.

因为 $\left(\sum h_1\right)^2 \leqslant 4\sum h_1^2 \leqslant 4\sum m_1^2 \leqslant \frac{16}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant \frac{256}{9}R^2$,所以

$$\sum h_1 \leqslant \frac{16}{3}R$$

结合式(7.6)，有

$$\sum \frac{h_2+h_3+h_4}{r_1} \leqslant \frac{2}{r} \cdot \frac{16}{3}R - 8 = \frac{32R}{3r} - 8$$

又$\left(\frac{4R}{3r}\right)^2 + 8 - \left(\frac{32R}{3r} - 8\right) = \frac{32}{9}\left(\frac{R}{r} - 3\right)^2 \geqslant 0$，所以$\left(\frac{4R}{3r}\right)^2 + 8 \geqslant \frac{32R}{3r} - 8$.
证毕.

由此易知：

19*.
$$\sum \frac{r_1}{h_2+h_3+h_4} \geqslant \frac{6r}{4R-3r} \tag{7.25}$$

20*. 当 $\lambda > 0$ 时，有

$$\sum \left(\frac{S_1}{r_1}\right)^\lambda \leqslant 4 \times 3^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{R}{3r}\right)^\lambda R^\lambda \tag{7.26}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由公式 $r_i = \frac{3V}{S-2S_i}$ 及均值不等式，有

$$\left(\frac{S_i}{r_i}\right)^\lambda = \frac{1}{(3V)^\lambda} \cdot [S_i(S-2S_i)]^\lambda \leqslant \frac{1}{(3V)^\lambda} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\right)^2\right]^\lambda =$$

$$\frac{1}{r^\lambda} \cdot \left(\frac{S}{8}\right)^\lambda \leqslant \frac{1}{r^\lambda} \cdot \left(\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}R^2}{8}\right)^\lambda = \frac{R^{2\lambda}}{\sqrt{3^\lambda}\, r^\lambda}$$

对上式求和，即得式(7.26).

21*. 当 $0 < \lambda \leqslant 2$ 时，有

$$\sum \left(\frac{S_1^2}{r_1}\right)^\lambda \leqslant 2^{\lambda+2} \left(\frac{R}{3r}\right)^\lambda R^{3\lambda} \tag{7.27}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由公式 $r_1 = \frac{3V}{S-2S_1}$ 及均值不等式，有

$$\left(\frac{S_1^2}{r_1}\right)^\lambda = \frac{1}{(3V)^\lambda} \cdot [S_1^2(S-2S_1)]^\lambda \leqslant \frac{S_1^\lambda}{(3V)^\lambda} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\right)^2\right]^\lambda =$$

$$\frac{S_1^\lambda}{r^\lambda} \cdot \left(\frac{S}{8}\right)^\lambda \leqslant \frac{S_1^\lambda}{r^\lambda} \cdot \left(\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}R^2}{8}\right)^\lambda = \frac{R^{2\lambda}}{\sqrt{3^\lambda}\, r^\lambda} \cdot S_1^\lambda$$

对上式求和，并应用幂平均不等式，有

$$\sum \left(\frac{S_1^2}{r_1}\right)^\lambda \leqslant \frac{R^{2\lambda}}{\sqrt{3^\lambda}\, r^\lambda} \sum (S_1^2)^{\frac{\lambda}{2}} \leqslant \frac{R^{2\lambda}}{\sqrt{3^\lambda}\, r^\lambda} \cdot 4\left(\frac{1}{4}\sum S_1^2\right)^{\frac{\lambda}{2}} \leqslant$$

$$\frac{R^{2\lambda}}{\sqrt{3^\lambda}\, r^\lambda} \cdot 4\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3}R^4\right)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2^{\lambda+2}R^{4\lambda}}{3^\lambda r^\lambda}$$

22*. $$\frac{1}{r^2}\leqslant\sum\frac{1}{r_1^2}\leqslant\frac{2}{r^2}-\frac{9}{R^2} \tag{7.28}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 先证明左边不等式.

由幂平均不等式和性质 1.3,有

$$\sum\frac{1}{r_1^2}\geqslant\frac{1}{4}\left(\sum\frac{1}{r_1}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}$$

再证明右边不等式.

由性质 1.4 与 1.3,得

$$\sum\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{3V}\sum\frac{S-2S_1}{r_1}=\frac{S}{3V}\sum\frac{1}{r_1}-\frac{2}{3V}\sum\frac{S_1}{r_1}=\frac{2}{r^2}-\frac{2}{3V}\sum\frac{S_1}{r_1}$$

由式(4.14):$V\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r$ 及式(7.14),得

$$\sum\frac{1}{r_1^2}=\frac{S}{3V}\sum\frac{1}{r_1}-\frac{2}{3V}\sum\frac{S_1}{r_1}\leqslant\frac{2}{r^2}-\frac{2}{3\times\frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r}\cdot 12\sqrt{3}\,r=\frac{2}{r^2}-\frac{9}{R^2}$$

23*. $$\sum\frac{S_1}{r_2+r_3+r_4}\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{R}{3r}\right)R \tag{7.29}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由性质 1.4,有

$$\sum\frac{S_1}{r_2+r_3+r_4}=\sum\frac{S_1}{\frac{3V}{S-2S_2}+\frac{3V}{S-2S_3}+\frac{3V}{S-2S_4}}=$$

$$\frac{1}{3V}\sum\frac{S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)}{\sum(S-2S_2)(S-2S_3)}\leqslant$$

$$\frac{1}{3V}\sum\frac{S_1(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)}{3\left[(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)\right]^{\frac{2}{3}}}=$$

$$\frac{1}{9V}\sum S_1\sqrt[3]{(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)}\leqslant$$

$$\frac{1}{9V}\left\{\sum S_1^2\sum\left[(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)\right]^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\frac{1}{9V}\left\{\sum S_1^2\cdot 4\left[\frac{1}{4}\sum(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)\right]^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{2}{9V}\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}\sum(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)\right]^{\frac{1}{3}}\leqslant$$

$$\frac{2}{9V}\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}\sum(S-2S_2)(S-2S_3)(S-2S_4)\right]^{\frac{1}{3}}\leqslant$$

$$\frac{2}{9V}\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left\{\left[\frac{1}{4}\left[(S-2S_1)+(S-2S_2)+(S-2S_3)+(S-2S_4)\right]\right]^3\right\}^{\frac{1}{3}}\leqslant$$

$$\frac{S}{9V}\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{3r}\left(\frac{16}{3}R^4\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{4R^2}{3\sqrt{3}r}$$

24*. $$\sum\frac{S_1^3}{(r_2r_3r_4)^2}\geqslant\frac{27\sqrt{3}R}{512r}\sum\left(\frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}\right)^2\geqslant\frac{27\sqrt{3}R}{2r}\tag{7.30}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 不失一般性,设 $S_1\geqslant S_2\geqslant S_3\geqslant S_4>0$, 由于

$$r_i=\frac{3V}{S-2S_i}\quad(i=1,2,3,4)$$

则 $r_1\geqslant r_2\geqslant r_3\geqslant r_4>0$,于是有

$$\frac{1}{S_2S_3S_4}\geqslant\frac{1}{S_1S_3S_4}\geqslant\frac{1}{S_1S_2S_4}\geqslant\frac{1}{S_1S_2S_3},\frac{1}{r_2r_3r_4}\geqslant\frac{1}{r_1r_3r_4}\geqslant\frac{1}{r_1r_2r_4}\geqslant\frac{1}{r_1r_2r_3}$$

由切比雪夫不等式,得

$$\sum\frac{S_1^3}{(r_2r_3r_4)^2}=\left(\prod_{i=1}^4S_i\right)^2\sum\frac{S_1}{(S_2S_3S_4r_2r_3r_4)^2}\geqslant$$

$$\left(\prod_{i=1}^4S_i\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4S_i\right)\left[\sum\frac{1}{(S_2S_3S_4r_2r_3r_4)^2}\right]$$

注意到 $3V=rS,h_i=3V/S_i\quad(i=1,2,3,4)$

并利用不等式(3.43) $\prod_{i=1}^4S_i\geqslant\frac{3^4}{2^5}\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot V^2$ 及(16.11) $V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}\cdot P^{\frac{2}{3}}$,有

$$\sum\frac{S_1^3}{(r_2r_3r_4)^2}\geqslant\frac{3V}{4r}\cdot\left(\frac{3^8}{2^{10}}\right)V^4\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^{\frac{2}{3}}\left[\sum\frac{1}{(S_2S_3S_4r_2r_3r_4)^2}\right]\geqslant$$

$$\left(\frac{3^9}{2^{12}}\right)\frac{V^5}{r}\cdot 8\sqrt{3}RV\left[\sum\frac{1}{(S_2S_3S_4r_2r_3r_4)^2}\right]=$$

$$\frac{27\sqrt{3}R}{512r}\cdot\sum\left(\frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}\right)^2$$

又由式(7.19) ,有

$$\sum\left(\frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}\right)^2\geqslant\frac{1}{4}\left(\sum\frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}\right)^2\geqslant 2^8$$

所以 $$\sum\frac{S_1^3}{(r_2r_3r_4)^2}\geqslant\frac{27\sqrt{3}R}{512r}\cdot\sum\left(\frac{h_2h_3h_4}{r_2r_3r_4}\right)^2\geqslant\frac{27\sqrt{3}R}{2r}$$

同引理 7.3 可证明

$$\sum S_1^3(S-2S_2)^2(S-2S_3)^2(S-2S_4)^2\leqslant\frac{1}{4^6}S^9$$

于是有

$$\sum \frac{S_1^3}{(r_2 r_3 r_4)^2} = \frac{1}{(3V)^6} \sum S_1^3 (S-2S_2)^2 (S-2S_3)^2 (S-2S_4)^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{(3V)^6} \cdot \frac{S^9}{4^6} = \frac{S^3}{4^6 r^6}$$

25*. $$\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{h_1 h_2 h_3 h_4} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{R}{3r}\right)^2 - \frac{1}{16} \tag{7.31}$$

当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

证明 由式(7.19)及(7.5)得

$$\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{h_1 h_2 h_3 h_4} \leqslant \frac{1}{32} \sum \frac{r_1}{h_1} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{R}{3r}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

证毕.

同理用式(7.20)及(7.7)可证明:

26*. $$\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{r_1 r_2 r_3 r_4} \leqslant 32\left(\frac{R}{3r}\right)^2 - 16 \tag{7.32}$$

当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时等号成立.

27*. 当 $n \geqslant 2, n \in \mathbf{R}^*$ 时,有

$$\sum \frac{1}{r_1^n} \geqslant \frac{2^{3-\frac{1}{2}n} \times 3^{\frac{3}{4}n}}{\left(\sum S_1^n\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.33}$$

当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 且 $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ 时等号成立.

证明 由于 $\sum \frac{1}{r_1} = \frac{2\sum S_1}{3V}$, $V \leqslant 2^{-\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{7}{4}} \left(\sum S_1\right)^{\frac{3}{2}}$, $\left(\sum S_1\right)^n \leqslant 4^{n-1} \sum S_1^n$,有

$$\sum \frac{1}{r_1^n} \geqslant \frac{1}{4^{n-1}}\left(\sum \frac{1}{r_1}\right)^n = \frac{1}{4^{n-1}}\left[\frac{2\sum S_1}{3V}\right]^n \geqslant \frac{1}{4^{n-1}}\left[\frac{2^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{\left(\sum S_1\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^n =$$

$$\frac{2^{\frac{n}{2}+2} \times 3^{\frac{3n}{4}}}{\left(\sum S_1\right)^{\frac{n}{2}}} \geqslant \frac{2^{\frac{n}{2}+2} \times 3^{\frac{3n}{4}}}{\left(4^{n-1}\sum S_1^n\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{3-\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{3n}{4}}}{\left(\sum S_1^n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

第八章 涉及四面体中线面和角平分面的不等式

本章约定：在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记 A_iA_j 的中点为 A_{ij}，A_{ij} 与 A_iA_j 的对棱所形成的三角形叫作四面体的中线面，面积为 M_{ij}，侧面 f_i 和 f_j 的夹角为 θ_{ij}，其二面角分面面积为 T_{ij} $(i=1,2,3,4)$.

8.1 几个引理

引理 8.1 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，角平分面面积为

$$T_{ij}=\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)\tag{8.1}$$

证明 设二面角 θ_{12} 角分面与 A_1A_2 的交点为 Q_{12}，由式(1.13)得

$$V_{\text{四面体}A_1A_3A_4Q_{12}}=\frac{2S_2T_{12}\sin\frac{1}{2}\theta_{12}}{3A_1Q_{12}}$$

$$V_{\text{四面体}A_2A_3A_4Q_{12}}=\frac{2S_1T_{12}\sin\frac{1}{2}\theta_{12}}{3A_2Q_{12}}$$

$$V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4}=\frac{2S_1S_2\sin\theta_{12}}{3A_1A_2}$$

注意到 $A_1Q_{12}+Q_{12}A_2=A_1A_2$，$V_{\text{四面体}A_1A_3A_4Q_{12}}+V_{\text{四面体}A_2A_3A_4Q_{12}}=V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4}$，由以上三式可求得

$$T_{12}=\frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}\cos\frac{1}{2}\theta_{12}$$

同理可证其余.证毕.

引理 8.2 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,中面面积 M_{ij} 满足

$$M_{ij}^2=\frac{1}{4}(S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij})\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)\tag{8.2}$$

证明 对四面体 $A_1A_2A_3A_4$,由性质 1.15,有

$$S_3^2+S_4^2=2S_3S_4\cos\theta_{34}+S_1S_3\cos\theta_{13}+S_1S_4\cos\theta_{14}+S_2S_3\cos\theta_{23}+S_2S_4\cos\theta_{24}$$

$$S_1^2+S_2^2=2S_1S_2\cos\theta_{12}+S_1S_3\cos\theta_{13}+S_1S_4\cos\theta_{14}+S_2S_3\cos\theta_{23}+S_2S_4\cos\theta_{24}$$

亦即 $$S_1S_3\cos\theta_{13}+S_1S_4\cos\theta_{14}+S_2S_3\cos\theta_{23}+S_2S_4\cos\theta_{24}=S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}$$

对四面体 $A_1A_3A_4A_{12}$ 和四面体 $A_2A_3A_4A_{12}$ 分别运用性质 1.16,得

$$M_{12}^2=\frac{1}{4}S_3^2+\frac{1}{4}S_4^2+S_2^2-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot\frac{1}{2}S_4\cos\theta_{34}-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot S_2\cos\theta_{23}-2\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot S_2\cos\theta_{24}$$

$$M_{12}^2=\frac{1}{4}S_3^2+\frac{1}{4}S_4^2+S_1^2-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot\frac{1}{2}S_4\cos\theta_{34}-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot S_1\cos\theta_{13}-2\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot S_1\cos\theta_{14}$$

将上述两式相加,并将前面结果代入,有

$$\begin{aligned}2M_{12}^2={}&\frac{1}{2}(S_3^2+S_4^2)+S_1^2+S_2^2-S_1S_3\cos\theta_{13}-S_1S_4\cos\theta_{14}-\\&S_2S_3\cos\theta_{23}-S_2S_4\cos\theta_{24}-S_3S_4\cos\theta_{34}=\\&S_1^2+S_2^2-\frac{1}{2}S_1S_3\cos\theta_{13}-\frac{1}{2}S_1S_4\cos\theta_{14}-\\&\frac{1}{2}S_2S_3\cos\theta_{23}-\frac{1}{2}S_2S_4\cos\theta_{24}=\\&S_1^2+S_2^2-\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\theta_{12})=\\&\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2)+S_1S_2\cos\theta_{12}\end{aligned}$$

故 $$M_{12}^2=\frac{1}{4}(S_1^2+S_2^2+2S_1S_2\cos\theta_{12})$$

同理可得其余.证毕.

引理 8.3 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,中面面积 M_{ij} 满足

$$M_{ij} \geqslant \frac{S_i + S_j}{2}\cos\frac{1}{2}\theta_{ij} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 4) \tag{8.3}$$

证明　由引理 8.2,有

$$M_{ij}^2 - \left(\frac{S_i + S_j}{2}\cos\theta_{ij}\right)^2 = \frac{1}{8}(1-\cos\theta_{ij})(S_i - S_j)^2 \geqslant 0$$

故式(8.3)成立.当且仅当 $S_i = S_j$ 时等号成立.

8.2　应　　用

1.(周永国)在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,当 $0 < \theta_{ij} \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\frac{M_{ij}}{T_{ij}} \leqslant \frac{(S_i + S_j)\sqrt{2(S_i^2 + S_j^2)}}{4S_iS_j} \tag{8.4}$$

当 $\frac{\pi}{2} < \theta_{ij} < \pi$ 时,式(8.4)不等号反向.当且仅当 $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$ 时取等号.

证明

$$\frac{M_{ij}^2}{T_{ij}^2} = \frac{(S_i + S_j)^2(S_i^2 + S_j^2 + 2S_iS_j\cos\theta_{ij})}{16S_i^2S_j^2\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}} =$$

$$\frac{(S_i + S_j)^2\left[S_i^2 + S_j^2 + 2S_iS_j\left(2\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij} - 1\right)\right]}{16S_i^2S_j^2\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}} =$$

$$\frac{(S_i^2 - S_j^2)^2}{16S_i^2S_j^2\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}} + \frac{(S_i + S_j)^2}{4S_iS_j} =$$

$$\frac{(S_i^2 - S_j^2)^2}{16S_i^2S_j^2}\left(1 + \tan^2\frac{1}{2}\theta_{ij}\right) + \frac{(S_i + S_j)^2}{4S_iS_j}$$

当 $0 < \theta_{ij} \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,$0 < \tan^2\frac{1}{2}\theta_{ij} \leqslant 1$,所以

$$\frac{M_{ij}^2}{T_{ij}^2} \leqslant \frac{(S_i^2 - S_j^2)^2}{8S_i^2S_j^2} + \frac{(S_i + S_j)^2}{4S_iS_j} = \frac{(S_i^2 + S_j^2)(S_i + S_j)^2}{8S_i^2S_j^2}$$

两边开平方既得式(8.4).当 $\frac{\pi}{2} < \theta_{ij} < \pi$ 时,$1 < \tan^2\frac{1}{2}\theta_{ij}$,式(8.4)反向.当且仅当 $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$ 时取等号.证毕.

2.(周永国)在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$\frac{M_{ij}}{T_{ij}} \geqslant \frac{(S_i + S_j)^2}{4S_iS_j} \tag{8.5}$$

当且仅当 $S_i=S_j$ 时等号成立.

证明 由引理 8.1 及 8.3 立得式(8.5).

3. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$M_{ij}-T_{ij}\geqslant\frac{(S_i-S_j)^2}{2(S_i+S_j)}\tag{8.6}$$

当且仅当 $S_i=S_j$ 时等号成立.

证明 由引理 8.2,有

$$M_{ij}^2=\frac{(S_i+S_j)^2}{4}-S_iS_j\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ij}$$

从而

$$\frac{S_i+S_j}{2}-M_{ij}=\frac{S_iS_j\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ij}}{\frac{S_i+S_j}{2}+M_{ij}}$$

对上式运用引理 8.1 及引理 8.3,有

$$\begin{aligned}M_{ij}\geqslant&\frac{S_i+S_j}{2}-\frac{S_iS_j\sin^2\frac{1}{2}\theta_{ij}}{\frac{S_i+S_j}{2}\left(1+\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}\right)}=\\&\frac{S_i+S_j}{2}-\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\left(1-\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}\right)=\\&\frac{S_i+S_j}{2}-\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}+T_{ij}\end{aligned}$$

对上式整理既得式(8.6). 当且仅当 $S_i=S_j$ 时等号成立. 证毕.

由式(8.6)立即可推出:

4.(周永国)
$$M_{ij}\geqslant T_{ij}\tag{8.7}$$

当且仅当 $S_i=S_j$ 时等号成立.

注 不等式(8.4),(8.5),(8.6),(8.7)分别是三角形中的不等式

$$\frac{m_a}{t_a}\leqslant\frac{(b+c)\sqrt{2(b^2+c^2)}}{4bc}\quad\left(0<A\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$m_a-t_a\geqslant\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}$$

$$\frac{m_a}{t_a}\geqslant\frac{(b+c)^2}{4bc}$$

$$m_a\geqslant t_a$$

在四面体中的推广,其中 m_a,t_a,a,b,c 分别是 $\triangle ABC$ 的中线、角平分线、三边长.

5*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}M_{ij}T_{ij}\geqslant\frac{1}{4}\left(\sum S_1\right)^2\tag{8.8}$$

当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 时等号成立.

证明 由引理 8.1 和 8.3,有

$$M_{ij}T_{ij}\geqslant S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}$$

对上式两边求和,并利用式(1.27),有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}M_{ij}T_{ij}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}=\frac{1}{4}\left(\sum S_1\right)^2$$

由引理 8.3 可知等号成立的条件,当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$.

6*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}T_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}\sum S_1 \tag{8.9}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由引理 8.1 及均值不等式,有

$$T_{ij}\leqslant\sqrt{S_iS_j}\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}$$

对上式两边求和,并利用幂平均不等式及式(1.27),有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}=\frac{1}{4}\left(\sum S_1\right)^2$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}T_{ij}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sqrt{S_iS_j}\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}\leqslant\left(6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[\frac{3}{2}\left(\sum S_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sum S_1$$

等号成立当且仅当 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 且 $\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}$ 均相等,即四面体为正四面体时.

7*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}T_{ij}^2\leqslant\frac{1}{4}\left(\sum S_1\right)^2 \tag{8.10}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由引理 8.1 及均值不等式,有

$$T_{ij}\leqslant\sqrt{S_iS_j}\cos\frac{1}{2}\theta_{ij}$$

所以有 $$T_{ij}^2\leqslant S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}=\frac{1}{2}(S_iS_j+S_iS_j\cos\theta_{ij})$$

对上式求和并利用不等式(2.14),有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}T_{ij}^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos\theta_{ij}\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}S_i^2\Big)=$$
$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)^2$$

8*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\,r^2} \tag{8.11}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 为了叙述的方便，在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，我们记：以棱 A_iA_j 为边，以其对棱中点为顶点的三角形面积为 M'_{ij}，高为 p_{ij}，所以 $M'_{ij}=\frac{1}{2}a_{ij}p_{ij}$. 设四面体的重心为 G，G 到棱 A_iA_j 的距离为 h_{ij}，棱 A_iA_j 的中点为 $A_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$. 易知 G 为 $A_{12}A_{34}$ 的中点，所以 $p_{12}=2h_{12}$，同理 $p_{ij}=2h_{ij}$.

由式(4.16)，有
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{h_{ij}^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$$
所以
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{p_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{2r^2}$$
又由式(4.9)，有
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}$$
因此
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M'_{ij}}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}p_{ij}}\leqslant$$
$$2\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{p_{ij}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\left(\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{1}{2r^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}\,r^2}$$
由证明过程可看出式(8.11)取等号的条件.

9. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}}\leqslant\frac{4\sqrt{6}R}{3V} \tag{8.12}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 设 d_1,d_2,d_3 与 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 分别为三对对棱 A_1A_2,A_3A_4；A_1A_3,A_2A_4；A_1A_4,A_2A_3 的距离和夹角，则由性质 1.12，有 $V=\frac{1}{6}A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot d_1\sin\theta_1$. 于是 $d_1\geqslant\frac{6V}{A_1A_2\cdot A_3A_4}$. 同理

$$d_2\geqslant\frac{6V}{A_1A_3\cdot A_2A_4},d_3\geqslant\frac{6V}{A_1A_4\cdot A_2A_3}$$

易知 $M_{12} \geqslant \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot d_1$ 等,从而

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}} \leqslant 2\Big(\frac{1}{A_1A_2 \cdot d_1}+\frac{1}{A_1A_3 \cdot d_2}+\frac{1}{A_1A_4 \cdot d_3}+\frac{1}{A_2A_3 \cdot d_3}+\frac{1}{A_2A_4 \cdot d_2}+\frac{1}{A_3A_4 \cdot d_1}\Big) \leqslant \frac{1}{3V}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3V}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3V}(16R^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{6}R}{3V}$$

10.在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}} \leqslant \frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}}{3V} \tag{8.13}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 设 A_{12} 是 A_1A_2 的中点,作 $A_1H \perp$ 平面 $A_3A_4A_{12}$ 于点 H,则由 $V_{四面体A_1A_3A_4A_{12}}=V_{四面体A_2A_3A_4A_{12}}$,有 $A_1H \cdot M_{34}=\frac{3}{2}V$. 易知 $A_1H \leqslant A_1A_{12}=\frac{1}{2}A_1A_2$,所以$\frac{1}{M_{34}} \leqslant \frac{A_1A_2}{3V}$.求和得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}} \leqslant \frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j}{3V}=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}}{3V}$$

11.(孔令恩)设 I 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心,并记 $\triangle A_iIA_j$ 的面积为 I_{ij},则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}I_{ij} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{4}\sum S_1 \tag{8.14}$$

证明 过内心 I 作 $IM \perp$ 平面 $A_2A_3A_4$ 于点 M,作 $IN \perp A_3A_4$ 于点 N.若记 A_i,A_j 对面的夹角为θ_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,则有 $\angle MNI=\frac{\theta_{ij}}{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle IMN$ 中有 $IN=\frac{r}{\sin\frac{\theta_{ij}}{2}}$,则

$$I_{34}=\frac{1}{2} \cdot A_3A_4 \cdot \frac{r}{\sin\frac{\theta_{12}}{2}} \tag{8.15}$$

由性质 1.13,有

$$V=\frac{2}{3}S_1S_2 \cdot \frac{\sin\theta_{12}}{A_3A_4} \tag{8.16}$$

由式(8.15),(8.16)消去 A_3A_4 得

$$I_{34}\cdot V=\frac{2}{3}S_1S_2\cos\frac{\theta_{12}}{2}\cdot r \tag{8.17}$$

注意到 $V=\frac{1}{3}r\sum S_1$,有

$$I_{34}=\frac{2S_1S_2}{\sum S_1}\cos\frac{\theta_{12}}{2} \tag{8.18}$$

对式(8.18)两边求和,并利用柯西不等式,得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}I_{ij}=\frac{2}{\sum S_1}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left(\sqrt{S_iS_j}\cdot\sqrt{S_iS_j}\cdot\cos\frac{\theta_{12}}{2}\right)\leqslant$$
$$\left[\frac{2}{\sum S_1}\right]\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos^2\frac{\theta_{12}}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{8.19}$$

由对称平均值不等式,有

$$\Big(\frac{1}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{4}\Big(\sum S_1\Big) \tag{8.20}$$

及恒等式(1.27),可得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos^2\frac{1}{2}\theta_{ij}=\frac{1}{4}\Big(\sum S_1\Big)^2 \tag{8.21}$$

对式(8.19)应用式(8.20),(8.21)即可得式(8.14).

12*. 当 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{R}^*$ 时,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}^n}\geqslant\frac{2^{3-\frac{n}{2}}\times 3^{\frac{n}{2}+1}}{\sum S_1^n} \tag{8.22}$$

证明 由式(8.2)和(1.24)有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}M_{ij}^2=\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(S_i^2+S_j^2)+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\cos\theta_{ij}=$$
$$\frac{3}{4}\sum S_1^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}S_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}S_j\cos\theta_{ij}=$$
$$\frac{3}{4}\sum S_1^2+\frac{1}{4}\sum S_1^2=\sum S_1^2$$

以及 $\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{n}{2}}\leqslant 4^{\frac{n}{2}-1}\sum S_1^n$,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}^n}\geqslant 6\Big(\frac{1}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{M_{ij}^2}\Big)^{\frac{n}{2}}\geqslant 6^{1-\frac{n}{2}}\left[\frac{6^2}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}M_{ij}^2}\right]^{\frac{n}{2}}=$$
$$\frac{6^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\sum S_1^2\right)^{\frac{n}{2}}}\geqslant\frac{6^{\frac{n}{2}+1}}{4^{\frac{n}{2}-1}\sum S_1^n}=\frac{3^{\frac{n}{2}+1}\times 2^{3-\frac{n}{2}}}{\sum S_1^n}$$

由式(8.7)易知：

13°. 当 $n \geqslant 2, n \in \mathbf{R}^{*}$ 时，有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{1}{T_{ij}^{n}} \geqslant \frac{2^{3-\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}+1}}{\sum S_{1}^{n}} \tag{8.23}$$

四面体中的费马问题

第九章

9.1 概念与定理

在 E^2 中，到 $\triangle ABC$ 三顶点距离之和为最小的点叫作这个三角形的费马(Fermat)点.当三角形的最大角小于120°时，它的费马点为对各边张120°角的点；当三角形的最大内角大于或等于120°时，它的费马点是钝角的顶点.

下面，我们讨论 E^3 中四面体的费马点问题.

定义 对于四面体 $A_1A_2A_3A_4$，若存在一点 F，并记 $|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$，满足

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\overrightarrow{FA_i}=\mathbf{0} \tag{9.1}$$

则称点 F 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点.

由上述定义可知，若费马点存在，则必在四面体内部.

定理 9.1(费马点的极小性) 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，则对于 E^3 中任一点 M，有

$$\sum_{i=1}^{4}|MA_i|\geqslant\sum_{i=1}^{4}|FA_i| \tag{9.2}$$

其中等号成立的充要条件是点 M 和点 F 重合.

证明 $\dfrac{\overrightarrow{FA_i}}{|\overrightarrow{FA_i}|}=\boldsymbol{e}_i$，则 $|\boldsymbol{e}_i|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\mathbf{0}$，于是

$$\sum_{i=1}^{4}|MA_i|=\sum_{i=1}^{4}|e_i|\,|\overrightarrow{MA_i}|\geqslant\sum_{i=1}^{4}|e_i\cdot\overrightarrow{MA_i}|\geqslant$$

$$\left|\sum_{i=1}^{4}(e_i\cdot\overrightarrow{MA_i})\right|=\left|\sum_{i=1}^{4}e_i\cdot(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA_i})\right|=$$

$$\left|\overrightarrow{MF}\cdot\sum_{i=1}^{4}e_i+\sum_{i=1}^{4}(e_i\cdot\overrightarrow{FA_i})\right|=$$

$$\left|\sum_{i=1}^{4}(e_i\cdot\overrightarrow{FA_i})\right|=\sum_{i=1}^{4}|\overrightarrow{FA_i}|$$

证毕.

定理 9.2　若一点 F 既是四面体的费马点,又是该四面体的外心,则此点必是四面体的重心;若一点 F 既是四面体的重心,又是四面体的外心,则此点必是四面体的费马点.

证明　设 O 为坐标原点,F 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点.由式(9.1),有

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\overrightarrow{OA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}}\quad(\text{其中}\ |\overrightarrow{FA_i}|=t_i>0)$$

(1) 若费马点 F 又是该四面体的外心,则

$$|\overrightarrow{FA_i}|=t_i=R\quad(i=1,2,3,4)$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{R}\overrightarrow{OA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{R}}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}$$

这表明费马点是四面体的重心.

(2) 设 F 是四面体的重心,则

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}$$

又 F 是该四面体的外心,则 $|\overrightarrow{FA_i}|=R(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\overrightarrow{FA_i}}{|\overrightarrow{FA_i}|}=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OF})=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OF})=$$

$$\frac{1}{R}\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}-4\,\overrightarrow{OF}\right)=\mathbf{0}$$

这表明点 F 是四面体的费马点.

定理 9.3　在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,记 $\angle A_iPA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4,i\neq j)$,$P$ 为四面体内的点,考虑方程组

$$\begin{cases}1+\cos\alpha_{12}+\cos\alpha_{13}+\cos\alpha_{14}=0\\ \cos\alpha_{21}+1+\cos\alpha_{23}+\cos\alpha_{24}=0\\ \cos\alpha_{31}+\cos\alpha_{32}+1+\cos\alpha_{34}=0\\ \cos\alpha_{41}+\cos\alpha_{42}+\cos\alpha_{43}+1=0\end{cases}\tag{9.3}$$

若点 P 满足式(9.3),则 P 为四面体的费马点,反之亦然.

证明 记 $\dfrac{\overrightarrow{FA_i}}{|\overrightarrow{FA_i}|}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$,则 $\cos\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$,代入方程组(9.3),得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_2\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_3\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_4\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$$

相加,得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i\right)^2=\boldsymbol{0}$,故 $\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\overrightarrow{FA_i}}{|\overrightarrow{FA_i}|}=\boldsymbol{0}$,即知点 P 为四面体的费马点.

反之,显然成立.

定理 9.4 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,记 $\angle A_iPA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,$P$ 为四面体内的点,则点 P 为四面体费马点的充要条件是

$$\alpha_{12}=\alpha_{34},\alpha_{13}=\alpha_{24},\alpha_{14}=\alpha_{23}\tag{9.4}$$

证明 充分性:记 $\dfrac{\overrightarrow{FA_i}}{|\overrightarrow{FA_i}|}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$,则 $\cos\alpha_{ij}=e_i\cdot e_j$,于是由式(9.4)便有

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3$$

相加,得
$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4$$

将 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$ 加到上式,得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$$

即有
$$(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{0}$$

若 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{0}$,即充分性得证. 否则有

$$(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\perp(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)$$

同理 $(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\perp(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)$,$(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4)\perp(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)$

于是 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4$ 共线,存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)+k_2(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)+k_3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{0}$$

整理,得
$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{e}_1=k_1\boldsymbol{e}_2+k_2\boldsymbol{e}_3+k_3\boldsymbol{e}_4$$

记 $k=k_1+k_2+k_3$,因为 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 线性无关,则 $k\neq 0$,所以

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{k_1}{k}\boldsymbol{e}_2+\frac{k_2}{k}\boldsymbol{e}_3+\frac{k_3}{k}\boldsymbol{e}_4$$

这里
$$\frac{k_1}{k}+\frac{k_2}{k}+\frac{k_3}{k}=1$$

由此可知由向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 确定的终点共面，这与 $A_1A_2A_3A_4$ 为四面体条件矛盾，故

$$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{0}$$

所以点 P 为四面体的费马点.

必要性：条件(9.3)等价于

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \tag{①}$$

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \tag{②}$$

$$\boldsymbol{e}_3\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \tag{③}$$

$$\boldsymbol{e}_4\cdot\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \tag{④}$$

①－②，①－③得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4 \tag{⑤}$$

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4 \tag{⑥}$$

⑤＋⑥

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_4\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{⑦}$$

将式子 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_4\cdot\boldsymbol{e}_4$ 加到⑦，得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_4\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{⑧}$$

将 $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=-\boldsymbol{e}_1$ 代入⑧，整理得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3$$

即
$$\cos\alpha_{14}=\cos\alpha_{23}$$

所以
$$\alpha_{14}=\alpha_{23}$$

同理
$$\alpha_{12}=\alpha_{34},\alpha_{13}=\alpha_{24}$$

定理 9.5　设 F 为四面体 $ABCD$ 内一点，如果 $FA+FB+FC+FD$ 为最小，则

$$\angle AFB=\angle CFD,\angle AFC=\angle BFD,\angle AFD=\angle BFC$$

且每对相等的角被同一条直线所平分.

证明　由于和 $FA+FB+FC+FD$ 最小，所以到顶点 C,D 的距离和等于 $FC+FD$ 的椭球面与到顶点 A,B 的距离和等于 $FA+FB$ 的椭球面在点 F 处相切，公切面的法线 PQ 平分 $\angle AFB$ 与 $\angle CFD$(图 9.1).

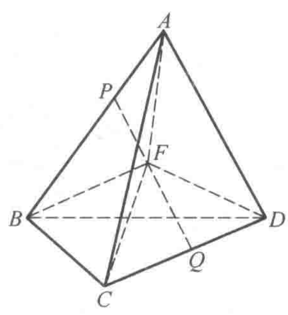


图 9.1

以 PQ 为轴作一个$180°$ 的旋转，则射线 FA 与 FB 重合，PC 与 PD 重合，于是 $\angle AFC=\angle BFD$. 同理可证其他.

由定理 9.1、定理 9.3、定理 9.4 及定理 9.5 可知：

定理 9.6　F 为费马点 $\Leftrightarrow$ 式(9.1) $\Leftrightarrow$ 式(9.2) $\Leftrightarrow$ 式(9.3) $\Leftrightarrow$ 式(9.4).

9.2　应　　用

1. 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，射线 A_iF 交该四面体侧面 f_i 于点 B_i，记 $|FA_i|=t_i$，$|FB_i|=l_i(i=1,2,3,4)$，则

(1)
$$\frac{1}{l_i}=\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{t_j}-\frac{1}{t_i}\tag{9.5}$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{l_i}=3\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\tag{9.6}$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{4}t_i\geqslant 3\sum_{i=1}^{4}l_i\tag{9.7}$$

其中等号成立当且仅当四面体的费马点与四面体的外心重合.

证明　(1) 记 $\overrightarrow{FA_i}=t_i\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$. 因为点 B_1 在 f_1 内，故

$$\overrightarrow{FB_1}=\lambda_2\overrightarrow{FA_2}+\lambda_3\overrightarrow{FA_3}+\lambda_4\overrightarrow{FA_4}\quad(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1)$$

即
$$-l_1\boldsymbol{e}_1=\lambda_2t_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3t_3\boldsymbol{e}_3+\lambda_4t_4\boldsymbol{e}_4$$

因为 $-l_1\boldsymbol{e}_1=l_1(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)$，$\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 线性无关，所以 $\lambda_i=\dfrac{l_1}{t_i}(i=2,3,4)$，故 $\dfrac{l_1}{t_2}+\dfrac{l_1}{t_3}+\dfrac{l_1}{t_4}=1$，即式(9.5)中 $i=1$ 的情形获证. 其余类推.

(2) 由式(9.5)求和便得式(9.6).

(3) 在运用算术－调和平均不等式，得

$$l_i=\frac{1}{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{4}\dfrac{1}{t_j}}\leqslant\frac{1}{9}\Big(\sum_{j=1}^{4}t_j-t_i\Big)$$

故
$$\sum_{i=1}^{4}l_i\leqslant\frac{1}{9}\Big(4\sum_{j=1}^{4}t_j-\sum_{i=1}^{4}t_i\Big)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}t_i$$

即
$$\sum_{i=1}^{4}t_i\geqslant 3\sum_{i=1}^{4}l_i$$

其中等号成立的充要条件是 $t_1=t_2=t_3=t_4$，即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点与外心重合.

2. 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，以 F 为球心作单位球面交射线 FA_i 于点 $C_i(i=1,2,3,4)$，设四面体 $A_1A_2A_3A_4$，$C_1C_2C_3C_4$ 的体积分别为 V，V_C，四

面体 $FA_2A_3A_4$，$A_1FA_3A_4$，$A_1A_2FA_4$，$A_1A_2A_3F$ 的体积分别为 V_1，V_2，V_3，V_4. 记 $|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$，则

(1) $$t_1V_1=t_2V_2=t_3V_3=t_4V_4=V\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\right)^{-1} \tag{9.8}$$

(2) $$t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}=\frac{4V}{V_C} \tag{9.9}$$

(3) $$\sum_{i=1}^{4}t_i\geqslant 4\left(\frac{V}{V_C}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{9.10}$$

证明 (1) 设 A_iF 交四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 f_i 于点 B_i，记 $|FB_i|=l_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\frac{V}{V_i}=\frac{|A_iB_i|}{|FB_i|}=\frac{t_i+l_i}{l_i}=t_i\left(\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{t_j}-\frac{1}{t_i}\right)+1=t_i\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{t_j}$$

故 $V_i\cdot t_i=V\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}$，即式(9.8)获证.

(2) 因为 $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{FC_i}=\frac{\overrightarrow{FA_i}}{t_i}$. 由性质 1.11，得

$$V_i\cdot t_i=V_1t_1=\frac{1}{6}t_1t_2t_3t_4\,|\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|$$

由于 $\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4$，易知

$$|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)|=|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4)|=|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|=|\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|$$

故 $$\begin{aligned}6V_C=&|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)|+|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4)|+|\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|+\\&|\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|=4|\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)|\end{aligned}$$

因此 $$V_i\cdot t_i=\frac{1}{4}t_1t_2t_3t_4V_C$$

$$t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}=\frac{4}{V_C}\sum_{i=1}^{4}V_i=\frac{4V}{V_C}$$

(3) 由麦克劳林不等式，有

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}t_i\right)^3\geqslant\frac{1}{4}\left(t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\right)$$

其中等号当且仅当 $t_1=t_2=t_3=t_4$ 时成立，即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点与外心重合时成立. 因而得

$$\left(\sum_{i=1}^{4}t_i\right)^3\geqslant 256\cdot\frac{V}{V_C}$$

故式(9.10)得证. 证毕.

3. 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，

$|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \geqslant 2\times 3^{\frac{5}{6}} V^{\frac{1}{3}} \tag{9.11}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 在式(9.10)中，由于四面体 $C_1C_2C_3C_4$ 为单位球内接四面体，所以

$$V_C \leqslant \frac{8}{9\sqrt{3}}$$

于是
$$\sum_{i=1}^{4} t_i \geqslant 4\left(\frac{9\sqrt{3}V}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\times 3^{\frac{5}{6}} V^{\frac{1}{3}}$$

同理，有：

4. 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，$|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$，则

$$t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i} \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{2}V \tag{9.12}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

5*. 若 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，$|FA_i|=t_i$，侧面 f_i 上的高为 $h_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum t_1 \geqslant \frac{3}{4}\sum h_1 \tag{9.13}$$

取等号的充要条件是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心、费马点和垂心三点合一.

证明 延长 A_iF 交侧面 f_i 于点 B_i，记 $|FB_i|=l_i(i=1,2,3,4)$，由式(9.7)有

$$3\sum_{i=1}^{4} l_i \leqslant \sum_{i=1}^{4} t_i$$

另外，易知

$$h_i \leqslant l_i + t_i \quad (i=1,2,3,4) \tag{9.14}$$

对式(9.14)求和，并利用式(9.7)，有

$$\sum h_1 \leqslant \sum l_1 + \sum t_1 \leqslant \frac{1}{3}\sum t_1 + \sum t_1 = \frac{4}{3}\sum t_1$$

故
$$\frac{3}{4}\sum h_1 \leqslant \sum t_1$$

式(9.13)等号成立的条件是：① 式(9.14)取等号，所以四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是垂心四面体，且费马点与垂心重合；② 式(9.7)取等号，所以四面体的费马点与四面体的外心重合. 综合 ①② 知：式(9.13)取等号的充要条件是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心、费马点和垂心三点合一. 证毕.

式(9.13)为孔令恩，赵月坤1998年在《中等数学》第6期上提出的一个猜

想,这里完全解决了这个问题.

6. 设 F 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点,$\angle A_iFA_j$ 的平分线为 w_{ij},F 到棱 A_iA_j 的距离为 r_{ij},则

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} w_{ij} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij} \tag{9.15}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 易知 $r_{ij} \leqslant w_{ij} = \dfrac{2t_it_j}{t_i+t_j}\cos\dfrac{\alpha_{ij}}{2} \leqslant \sqrt{t_it_j}\cos\dfrac{\alpha_{ij}}{2}$,于是

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij} \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} w_{ij} \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \sqrt{t_it_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}$$

由定理 9.3 及定理 9.4 知 $\alpha_{12}=\alpha_{34}$,$\alpha_{13}=\alpha_{24}$,$\alpha_{14}=\alpha_{23}$ 且 $\cos\alpha_{12}+\cos\alpha_{13}+\cos\alpha_{14}=-1$,所以

$$\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{14}}{2}=1$$

因此$\left(\cos\dfrac{\alpha_{12}}{2}+\cos\dfrac{\alpha_{13}}{2}+\cos\dfrac{\alpha_{14}}{2}\right)^2 \leqslant 3\left(\cos^2\dfrac{\alpha_{12}}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha_{13}}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha_{14}}{2}\right)=3$

故
$$\cos\frac{\alpha_{12}}{2}+\cos\frac{\alpha_{13}}{2}+\cos\frac{\alpha_{14}}{2} \leqslant \sqrt{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \sqrt{t_it_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2} &= (\sqrt{t_1t_2}+\sqrt{t_3t_4})\cos\frac{\alpha_{12}}{2}+(\sqrt{t_1t_3}+\sqrt{t_2t_4})\cos\frac{\alpha_{13}}{2}+\\ &\quad (\sqrt{t_1t_4}+\sqrt{t_2t_3})\cos\frac{\alpha_{14}}{2} \leqslant\\ &\quad \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} t_i\right)\left(\cos\frac{\alpha_{12}}{2}+\cos\frac{\alpha_{13}}{2}+\cos\frac{\alpha_{14}}{2}\right) \leqslant\\ &\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4} t_i\end{aligned}$$

7. 设 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点,$|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$,A_1A_2 与 A_3A_4,A_1A_3 与 A_2A_4,A_1A_4 与 A_2A_3 的距离分别为 d_1,d_2,d_3,则

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{4} d_i \tag{9.16}$$

证明 易知 $d_1 \leqslant r_{12}+r_{34}$,$d_2 \leqslant r_{13}+r_{24}$,$d_3 \leqslant r_{14}+r_{23}$.

由式(9.15),有

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}[(r_{12}+r_{34})+(r_{13}+r_{24})+(r_{14}+r_{23})] \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(d_1+d_2+d_3)$$

证毕.

8. 设 m_i 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 f_i 上的中线,F 是其费马点,$|FA_i|=$

$t_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4} m_i \tag{9.17}$$

证明　由费马点的最小性及中线的性质易知式(9.17)成立.

9. 设 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，$|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2} \tag{9.18}$$

证明　由不等式(9.17)及性质1.20,得

$$\sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4} m_i \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{4\sum_{i=1}^{4} m_i^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2}$$

10. 设 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，且 $\cos\angle A_iFA_j=-\frac{1}{3}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{4} |FA_i|\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 + 8\sqrt[3]{9}V^{\frac{2}{3}}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明　记 $|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$. 对于 $\triangle A_iFA_j$，有

$$a_{ij}^2 = t_i^2 + t_j^2 - 2t_it_j\cos\angle A_iFA_j$$

因为
$$\cos\angle A_iFA_j = -\frac{1}{3}$$

所以
$$a_{ij}^2 = t_i^2 + t_j^2 + \frac{2}{3}t_it_j$$

故
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 = 3\sum_{i=1}^{4} t_i + \frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} t_it_j = 3\left(\sum_{i=1}^{4} t_i\right)^2 - \frac{16}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} t_it_j$$

由麦克劳林定理,有

$$\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} t_it_j}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{1}{4}t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{1}{3}}$$

其中当且仅当 $t_1=t_2=t_3=t_4$ 时等号成立,于是有

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{4} t_i\right)^2 &= \frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 + \frac{16}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} t_it_j \geqslant \\
&\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 + \frac{16}{9}\cdot 6\left(\frac{1}{4}t_1t_2t_3t_4\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{t_i}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant \\
&\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 + \frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}V\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant \\
&\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 + 8\sqrt[3]{9}V^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

11. 设 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，且 $\cos\angle A_iFA_j=-\frac{1}{3}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4}t_i\leqslant\frac{\sqrt{6}}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij} \tag{9.19}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点与外心重合时等号成立.

证明 记 $|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$. 对于 $\triangle A_iFA_j$，有

$$a_{ij}^2=t_i^2+t_j^2-2t_it_j\cos\angle A_iFA_j$$

因为
$$\cos\angle A_iFA_j=-\frac{1}{3}$$

所以
$$a_{ij}^2=t_i^2+t_j^2+\frac{2}{3}t_it_j=\frac{1}{3}[2(t_i^2+t_j^2)+(t_i+t_j)^2]\geqslant\frac{2}{3}(t_i+t_j)^2$$

于是
$$\frac{\sqrt{6}}{2}a_{ij}\geqslant t_i+t_j$$

求和，得
$$\sum_{i=1}^{4}t_i\leqslant\frac{\sqrt{6}}{6}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

其中当且仅当 $t_1=t_2=t_3=t_4$ 时等号成立.

12*. 设 F 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的费马点，且 $\cos\angle A_iFA_j=-\frac{1}{3}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，点 F 到侧面 f_i 的距离为 $r_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum r_1\leqslant 4r \tag{9.20}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 记 $|FA_i|=t_i(i=1,2,3,4)$. 不妨设 $t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant t_4$. 在 $\triangle A_iFA_j$ 中，由余弦定理得

$$a_{ij}^2=t_i^2+t_j^2+\frac{2}{3}t_it_j\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)$$

由 Heron— 秦九韶公式，有

$$16S_1^2=\frac{32}{9}(t_2^2t_3^2+t_2^2t_4^2+t_3^2t_4^2+t_2^3t_3t_4+t_2t_3^3t_4+t_2t_3t_4^3)$$

$$16S_2^2=\frac{32}{9}(t_1^2t_3^2+t_1^2t_4^2+t_3^2t_4^2+t_1^3t_3t_4+t_1t_3^3t_4+t_1t_3t_4^3)$$

于是

$$16(S_1^2-S_2^2)=\frac{32}{9}(t_2-t_1)(t_3^2t_4+t_3^2t_2+t_3^2t_1+t_4^2t_3+t_4^2t_2+t_4^2t_1+t_3t_4t_1+t_3t_4t_2)\geqslant 0$$

所以 $$S_1 \geqslant S_2$$

同理 $$S_2 \geqslant S_3, S_3 \geqslant S_4$$

所以 $$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant S_4 \tag{9.21}$$

又因为 $16(t_1^2 S_1^2 - t_2^2 S_2^2) = \frac{32}{9}(t_1 - t_2)(t_3 t_2 t_1 + t_4 t_2 t_1 + t_3 t_4 t_1 + t_3 t_4 t_2) \leqslant 0$

所以 $$t_1 S_1 \leqslant t_2 S_2$$

同理 $$t_2 S_2 \leqslant t_3 S_3, t_3 S_3 \leqslant t_4 S_4$$

所以 $$t_1 S_1 \leqslant t_2 S_2 \leqslant t_3 S_3 \leqslant t_4 S_4 \tag{9.22}$$

又因为 $V_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} t_2 t_3 t_4, V_2 = \frac{2\sqrt{3}}{9} t_1 t_3 t_4, V_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9} t_1 t_2 t_4, V_4 = \frac{2\sqrt{3}}{9} t_1 t_2 t_3$

所以
$$r_1 = \frac{3V_1}{S_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{t_1 S_1}, r_2 = \frac{3V_2}{S_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{t_2 S_2}$$
$$r_3 = \frac{3V_3}{S_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{t_3 S_3}, r_4 = \frac{3V_4}{S_4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{t_4 S_4}$$

由式(9.22),得
$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \geqslant r_4 \tag{9.23}$$

由式(9.21),(9.23)及切比雪夫不等式,得
$$\frac{1}{4} \sum S_1 \sum r_1 \leqslant \sum r_1 S_1 = 3V = rS$$

故 $$\sum r_1 \leqslant 4r$$

证毕.

第十章 由一个引理所引出的不等式

10.1 引理及证明

引理 10.1 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 顶点 A_i 所对的侧面面积和高分别为 $S_i, h_i (i=1,2,3,4)$，则

$$h_1 \leqslant \frac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}} \tag{10.1}$$

当且仅当侧面 f_2, f_3, f_4 与底面 f_1 所成二面角相等时取等号.

证法一 设 α, β, γ 分别是以 A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 为棱的二面角的大小，h'_1 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 边 A_2A_3 上的高，则

$$h_1 = h'_1 \sin\alpha = \frac{2S_4}{A_2A_3}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} =$$

$$\frac{2}{A_2A_3}\sqrt{(S_4+S_4\cos\alpha)(S_4-S_4\cos\alpha)}$$

同理 $$h_2 = \frac{2}{A_2A_4}\sqrt{(S_3+S_3\cos\beta)(S_3-S_3\cos\beta)}$$

$$h_3 = \frac{2}{A_3A_4}\sqrt{(S_2+S_2\cos\gamma)(S_2-S_2\cos\gamma)}$$

故 $$h_1 = \frac{2}{A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4}\cdot Q$$

其中 $Q=\sum\limits_{k=2}^{4}\sqrt{(S_k+S_k\cos\theta_k)(S_k-S_k\cos\theta_k)}$，$\theta_2=\alpha, \theta_3=\beta$，$\theta_4=\gamma$

由柯西不等式,可得

$$Q \leqslant [(S_4+S_4\cos\alpha)+(S_3+S_3\cos\beta)+(S_2+S_2\cos\gamma)]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$[(S_4-S_4\cos\alpha)+(S_3-S_3\cos\beta)+(S_2-S_2\cos\gamma)]^{\frac{1}{2}}=$$
$$(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{1}{2}}(S_2+S_3+S_4-S_1)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\sqrt{S(S-2S_1)}$$

从而 $h_1 \leqslant \dfrac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4}$. 由柯西不等式,取等号的条件是:$\alpha=\beta=\gamma$. 证毕.

证法二 设四面体顶点 A_1 在底面的射影点到底面三边的距离分别为 x, y, z,则易证

$$A_2A_3x+A_2A_4y+A_3A_4z \geqslant 2S_1 \tag{10.2}$$

当且仅当射影点在三角形内部(包括边界)时,等号成立.

此时三个侧面的斜高分别为

$$\sqrt{x^2+h_1^2},\sqrt{y^2+h_1^2},\sqrt{z^2+h_1^2}$$

则侧面积

$$S'=\frac{1}{2}(A_2A_3\sqrt{x^2+h_1^2}+A_2A_4\sqrt{y^2+h_1^2}+A_3A_4\sqrt{z^2+h_1^2})=$$
$$\frac{1}{2}(\sqrt{|A_2A_3|^2x^2+|A_2A_3|^2h_1^2}+\sqrt{|A_2A_4|^2y^2+|A_2A_4|^2h_1^2}+$$
$$\sqrt{|A_3A_4|^2z^2+|A_3A_4|^2h_1^2})\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{(A_2A_3x+A_2A_4y+A_3A_4z)^2+(A_2A_3h_1+A_2A_4h_1+A_3A_4h_1)^2}\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{4S_1^2+(A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4)^2h_1^2} \tag{10.3}$$

其中第一个不等号是应用了闵可夫斯基不等式,且不难验证等号成立的条件是:$x=y=z=r$(r 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的内切圆半径),既射影点与 $\triangle A_2A_3A_4$ 内心重合,整理可得式(10.1).

10.2 引理的应用

1*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,顶点 A_i 所对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$, $|A_iA_j|=a_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$18V^2[(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2+(a_{13}+a_{14}+a_{34})^2+(a_{12}+a_{14}+a_{24})^2+$$
$$(a_{23}+a_{12}+a_{13})^2]\leqslant(S_1+S_2+S_3+S_4)^4 \tag{10.4}$$

证明　由引理 10.1 可得

$$S_1^2h_1^2(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2\leqslant 4SS_1^2(S-2S_1)\leqslant 2SS_1\cdot 2S_1(S-2S_1)\leqslant\frac{1}{2}S^3S_1$$

所以有 $18V^2(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2\leqslant S^3S_1$ 等,求和可得

$$\begin{aligned}&18V^2[(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2+(a_{13}+a_{14}+a_{34})^2+\\&(a_{12}+a_{14}+a_{24})^2+(a_{12}+a_{13}+a_{23})^2]\leqslant\\&S^3\sum_{k=1}^{4}S_k=S^4\end{aligned}$$

证毕.

2*.
$$3\sqrt{2}V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\leqslant S^2\tag{10.5}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明　由 $h_1\leqslant\dfrac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}$ 得

$$h_1(a_{23}+a_{24}+a_{34})\leqslant 2\sqrt{S(S-2S_1)}$$

$$\begin{aligned}h_1S_1(a_{23}+a_{24}+a_{34})&\leqslant\sqrt{2}\sqrt{S_1}\sqrt{S\cdot 2S_1\cdot(S-2S_1)}\leqslant\\&\sqrt{2}\sqrt{S_1}\sqrt{S}\cdot\frac{S}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}S^{\frac{3}{2}}\sqrt{S_1}\end{aligned}$$

所以
$$V(a_{23}+a_{24}+a_{34})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{6}S^{\frac{3}{2}}\sqrt{S_1}$$

$$2V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{6}S^{\frac{3}{2}}\sum\sqrt{S_1}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}S^2$$

3*.
$$2^4\cdot 3^5\cdot\sqrt[3]{3}V^{\frac{10}{3}}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant S^6\tag{10.6}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

先证明一个引理:

引理 10.2　设 $0<x_i<\frac{1}{2}(i=1,2,3)$,且 $x_1+x_2+x_3=1$,则

$$x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant\frac{1}{81}\tag{10.7}$$

证明　不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3$,则 $x_1\geqslant\frac{1}{3}$,$x_3\leqslant\frac{1}{3}$.

设 $x_1=\frac{1}{3}+\varepsilon_1$,$x_3=\frac{1}{3}-\varepsilon_2$,其中 $\varepsilon_1\geqslant 0$,$\varepsilon_2\geqslant 0$,则

$$x_2=\frac{1}{3}-\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\left(\frac{1}{3}+\varepsilon_1\right)\left(\frac{1}{3}-\varepsilon_2\right)\left(\frac{1}{3}-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)=$$

$$\left\{\frac{1}{27}-\frac{1}{3}\left[\varepsilon_1\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right]\right\}\cdot$$

$$\left[\frac{1}{3}+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\right]=$$

$$\frac{1}{81}-\frac{1}{27}\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+\varepsilon_1\varepsilon_2[1-3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]\}-$$

$$\frac{1}{3}[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2]\cdot$$

$$\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+\varepsilon_1\varepsilon_2[1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]\}$$

因为 $\varepsilon_1<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$\varepsilon_1-\varepsilon_2<\frac{1}{6}$. 所以 $1-3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)>0$，$1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)>0$. 所以 $x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant\frac{1}{81}$.

推论 1　设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 三边，则

$$abc(a^2+b^2+c^2)\leqslant\frac{1}{81}(a+b+c)^5$$

推论 2　设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 三边，Δ 是 $\triangle ABC$ 的面积，则

$$18\sqrt[3]{2}\Delta^{\frac{2}{3}}\left(\sum a^2\right)\leqslant\left(\sum a\right)^{\frac{10}{3}}\tag{10.8}$$

证明　由熟知的 $\triangle ABC$ 中的不等式 $\Delta\leqslant\frac{3}{4}\frac{\prod a}{\sqrt{\sum a^2}}$ 得

$$\Delta^{\frac{2}{3}}\left(\sum a^2\right)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\sum a^2\right)^{\frac{1}{3}}}\left(\sum a^2\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\prod a\left(\sum a^2\right)\right]^{\frac{2}{3}}\leqslant$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{81}\left(\sum a\right)^5\right]^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{18\sqrt[3]{2}}\left(\sum a\right)^{\frac{10}{3}}$$

现在证明原题.

由 $h_1\leqslant\frac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}$ 及式(10.8)得

$$h_1^{\frac{10}{3}}\leqslant\frac{2^{\frac{10}{3}}[S(S-2S_1)]^{\frac{5}{3}}}{(a_{23}+a_{24}+a_{34})^{\frac{10}{3}}}\leqslant\frac{2^{\frac{10}{3}}[S(S-2S_1)]^{\frac{5}{3}}}{18\sqrt[3]{2}S_1^{\frac{2}{3}}(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)}$$

所以

$$\frac{9}{4}S_1^{\frac{2}{3}}h_1^{\frac{10}{3}}(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)\leqslant[S(S-2S_1)]^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{9}{4}(3V)^{\frac{10}{3}}(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)\leqslant[S(S-2S_1)]^{\frac{5}{3}}S_1^{\frac{8}{3}}=$$

$$\frac{S^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}}\left[(S-2S_1)\cdot 2S_1\right]^{\frac{5}{3}}\cdot S_1\leqslant$$

$$\frac{S^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{10}{3}}S_1=\frac{S^5}{2^5}S_1$$

对上式求和，得 $2^4\cdot 3^5\cdot\sqrt[3]{3}V^{\frac{10}{3}}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant S^5\sum\limits_{i=1}^{4}S_i=S^6$. 证毕.

4*. $$V^2\sum h_1^2\leqslant\frac{4}{243}S^2\sum S_1^2\tag{10.9}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由 $S_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{36}(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2$，得 $a_{23}+a_{24}+a_{34}\geqslant\frac{6}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{S_1}$，所以

$$h_1\leqslant\frac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}\leqslant\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{S(S-2S_1)}}{3\sqrt{S_1}}$$

所以 $S_1^2h_1^4\leqslant\frac{1}{27}S^2(S-2S_1)^2$，即 $V^2h_1^2\leqslant\frac{1}{243}S^2(S-2S_1)^2$

所以 $$V^2\sum h_1^2\leqslant\frac{1}{243}S^2\sum(S-2S_1)^2=\frac{4}{243}S^2\sum S_1^2$$

证毕.

5*. $$\sum\frac{1}{S_1^2}\leqslant\frac{2}{27r^4}-\frac{\sqrt[3]{3}}{9R^{\frac{4}{3}}r^{\frac{8}{3}}}\tag{10.10}$$

证明 将公式 $h_i=\frac{3V}{S_i}$ 代入式(10.9)，得

$$9V^4\sum\frac{1}{S_1^2}\leqslant\frac{4}{243}S^2\sum S_1^2$$

注意到 $V=\frac{1}{3}Sr$，于是有

$$\sum\frac{1}{S_1^2}\leqslant\frac{4}{243}\left(\frac{S}{3V}\right)^2\frac{1}{V^2}\sum S_1^2=\frac{4}{243}\frac{1}{r^2V^2}\sum S_1^2\tag{10.11}$$

又由式(12.22)，有不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\right)^2-2\sum\limits_{i=1}^{4}S_i^2\geqslant 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}$，得到

$$\sum S_i^2\leqslant\frac{1}{2}S^2-9\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}\tag{10.12}$$

又由式(4.14)：$V\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}R^2r$ 得到

$$V^{\frac{2}{3}}\leqslant\frac{4}{3}R^{\frac{4}{3}}r^{\frac{2}{3}}\tag{10.13}$$

由式(10.12)，(10.13)及式(10.11)，得

$$\sum \frac{1}{S_1^2} \leqslant \frac{4}{243} \frac{1}{r^2 V^2} \left(\frac{1}{2} S^2 - 9\sqrt[3]{3} V^{\frac{4}{3}} \right) = \tag{10.14}$$

$$\frac{2}{27r^2} \left(\frac{S}{3V} \right)^2 - \frac{4\sqrt[3]{3}}{27r^2 V^{\frac{2}{3}}} \leqslant$$

$$\frac{2}{27r^4} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9R^{\frac{4}{3}} r^{\frac{8}{3}}}$$

证毕.

注意到 $3r \leqslant R$,得:

6*.
$$\sum \frac{1}{S_1^2} \leqslant \frac{2}{27r^4} - \frac{3}{R^4} \tag{10.15}$$

猜想 设 S_1, S_2, S_3, S_4 是四面体的侧面积,r 是四面体的内切球半径. 证明或否定

$$\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \frac{1}{S_3^2} + \frac{1}{S_4^2} \leqslant \frac{1}{27r^4}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

7*.
$$V \sum h_1 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{27} S^2 \tag{10.16}$$

证明 因为 $h_1 \sqrt{S_1} \leqslant \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \sqrt{S(S-2S_1)}$,得 $h_1^2 S_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9} S(S-2S_1)$,$Vh_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27} S(S-2S_1)$,$V\sum h_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27} \sum S(S-2S_1) = \frac{2\sqrt{3}}{27} S^2$. 证毕.

8. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球的半径为 r,则

$$\frac{2\sqrt{3}}{R^2} \leqslant \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2} \tag{10.17}$$

证明 先证明右边不等式.

注意到 $h_1 = \frac{3V}{S_1}$ 等,及 $V = \frac{1}{3} rS$,代入不等式(10.16),整理可得不等式(10.17).

再证明左边不等式.

由柯西不等式可知

$$(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} \right) \geqslant 16$$

又由不等式 $S \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}} R^2$,有

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} \geqslant \frac{16}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{R^2}$$

9. 在四面体中,当表面积一定时,正四面体的体积最大;当体积一定时,正

四面体的表面积最小.

证明 因为 $h_1 \leqslant \dfrac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}} \leqslant \dfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{S(S-2S_1)}}{3\sqrt{S_1}}$,所以 $h_1\sqrt{S_1} \leqslant \dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}\sqrt{S(S-2S_1)}$,即

$$V \leqslant \frac{\sqrt[4]{3}}{9\sqrt{2}}\sqrt{S\cdot 2S_1(S-2S_1)} \leqslant \frac{\sqrt[4]{3}}{18\sqrt{2}}S^{\frac{3}{2}}$$

以上各等号成立的条件分别为 $\alpha=\beta=\gamma$,$a_{23}=a_{24}=a_{34}$,$S_1=\dfrac{S}{4}$(其中 α,β,γ 意义同引理),即四面体为正四面体时取得.

10.(冷岗松)设 r_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的内切圆的半径,R,r 分别是其外接球、内切球半径,则

$$\frac{18}{R^2} \leqslant \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2} \leqslant \frac{2}{r^2} \tag{10.18}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

证明 由 Walker 不等式 $\sum \dfrac{1}{a^2} \leqslant \dfrac{1}{4r_i^2}$ 得 $\sum\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a'^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{r_i^2}$,注意到 $\sum(a^2+a'^2) \leqslant 16R^2$,$\sum(a^2+a'^2)\sum\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a'^2}\right) \geqslant 36$,所以

$$\sum\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a'^2}\right) \geqslant \frac{9}{4R^2}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2} \geqslant \frac{18}{R^2}$$

又由 $h_1 \leqslant \dfrac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}$,注意到 $rS=h_1S_1=3V$,则

$$r=\frac{h_1S_1}{S} \leqslant \frac{2S_1}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}\cdot\frac{\sqrt{S(S-2S_1)}}{S}=r_1\cdot\sqrt{\frac{S-2S_1}{S}}$$

同理
$$r \leqslant r_i\cdot\sqrt{\frac{S-2S_i}{S}} \quad (i=1,2,3,4) \tag{10.19}$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{r_i^2} \leqslant \dfrac{1}{r^2}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{S-2S_i}{S}=\dfrac{2}{r^2}$. 证毕.

11. 设 r_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的内切圆的半径,r 是其内切球半径 $k>0$,则

$$\sum_{i=1}^{4}r_i^k \geqslant 4\sqrt{2^k}\,r^k \tag{10.20}$$

证明 由式(10.19)得

$$r_i^k \geqslant r^k \sqrt{\left(\frac{S}{S-2S_i}\right)^k} \quad (i=1,2,3,4)$$

将上式相加,得

$$\sum_{i=1}^{4} r_i^k \geqslant r^k \sum_{i=1}^{4} \sqrt{\left(\frac{S}{S-2S_i}\right)^k}$$

用凸函数性质可证明

$$\sum_{i=1}^{4} \sqrt{\left(\frac{S}{S-2S_i}\right)^k} \geqslant 4\sqrt{2^k}$$

代入上式,得

$$\sum_{i=1}^{4} r_i^k \geqslant 4\sqrt{2^k}\, r^k$$

证毕.

式(10.18)是一个很强的不等式,用它可以证明许多有意思的不等式.例如利用三角形中的不等式:$\Delta \geqslant 3\sqrt{3}\,r'^2$(这里 r' 为三角形内切圆半径),有

$$\frac{1}{S_i} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{r_i^2}$$

对上式求和,得

$$\sum \frac{1}{S_1} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} \sum \frac{1}{r_1^2} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$$

这就证明了式(10.17).

12*.设 R_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i\,(i=1,2,3,4)$ 的外接球半径,r 是 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径,则

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{R_i^2} \leqslant \frac{1}{2r^2} \qquad (10.21)$$

证明 设 r_i 是顶点 $A_i\,(i=1,2,3,4)$ 所对侧面的内切圆半径,由三角形中的欧拉定理,有 $R_i \geqslant 2r_i\,(i=1,2,3,4)$,利用不等式(10.18),有

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{R_i^2} \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} \leqslant \frac{1}{2r^2}$$

证毕.

王卫东于1994年猜测:$\sum_{k=1}^{4} R_k^2 \leqslant \frac{32}{9} R^2$.《常用不等式(第四版)》一书将其列为第88个问题,笔者于2011年否定了这个猜测.

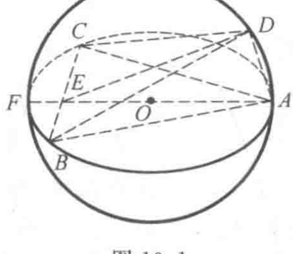


图10.1

事实上,如图10.1,四面体 $ABCD$ 内接于球 O,顶点 A 所对的侧面的外接圆的半径为 R_1,等等,其中侧面 ABC 内接于大圆

面 $ABFC$，大圆 ADF 所在平面垂直于平面 $ABFC$，AF 通过球心 O，$BC \perp AF$，设直径 $2R=AF=8$，$BC=AD=2$，于是由射影定理，得

$$BE^2=AE\cdot(8-AE)=1, AE=7.8730$$

$$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=7.9362$$

$$\cos\angle DAF=\frac{AD}{AF}=\frac{1}{4}=0.25$$

所以
$$DE=\sqrt{AE^2+AD^2-2\cdot AE\cdot AD\cos\angle DAF}=7.6231$$

$$CD=BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=7.6884$$

$$\sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=0.9915$$

记侧面 BCD 的外接圆的半径为 R_1，则 $R_1=\dfrac{CD}{2\sin\angle CBD}=3.8771$.

在 $\triangle ABD$ 中

$$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2\cdot AB\cdot AD}=0.2480$$

$$\sin\angle DAB=0.9688$$

显然，侧面 ABD 和侧面 ACD 的外接圆半径相等，记为 R_2，则

$$R_2=\frac{BD}{2\sin\angle BAD}=3.9680$$

$$R^2+R_1^2+2R_2^2=62.52195241$$

$$\frac{32}{9}R^2=56.88888889$$

所以
$$\sum_{k=1}^{4}R_k^2>\frac{32}{9}R^2$$

故原猜测不成立. 证毕.

用同样的方法可以证明不等式：$\sum\limits_{k=1}^{4}R_k\leqslant\dfrac{8\sqrt{2}}{3}R$ 也是不成立的. 但我们有如下稍弱不等式成立.

13*. 设 R_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的外接圆半径，R，r 分别是四面体的外接球和内切球半径，则

$$\sum R_1\leqslant\frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R \tag{10.22}$$

证明 记 $A_1A_2=a'$，$A_1A_3=b'$，$A_1A_4=c'$，$A_2A_3=c$，$A_2A_4=b$，$A_3A_4=a$，r_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的内切圆的半径，由三角形中的面积公式

$$R_1=\frac{a'b'c'}{4S_1}=\frac{a'b'c'}{2r_1(a'+b'+c')}$$

对上式求和并应用柯西不等式和算术－几何平均值不等式，有

$$\sum R_1=\sum\frac{abc}{2r_1(a+b+c)}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\sum\frac{1}{r_1^2}}\sqrt{\sum\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)^2}}\leqslant$$

$$\frac{1}{6}\sqrt{\sum\frac{1}{r_1^2}}\sqrt{\sum(abc)^{\frac{4}{3}}}$$

由式(3.13)及式(4.7)，有

$$(abc')^{\frac{4}{3}}+(a'bc)^{\frac{4}{3}}+(ab'c)^{\frac{4}{3}}+(a'b'c')^{\frac{4}{3}}\leqslant$$

$$\frac{1}{9}(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)^2\leqslant$$

$$\frac{16^2}{9}R^4$$

结合式(10.18)有

$$\sum R_1\leqslant\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{r^2}}\sqrt{\frac{16^2}{9}R^4}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R$$

证毕.

猜测 证明或否定$\sum\limits_{k=1}^{4}R_k\geqslant\frac{8\sqrt{2}}{3}R$.

14.(冷岗松) 设r_i是四面体$A_1A_2A_3A_4$的面$f_i(i=1,2,3,4)$的内切圆的半径，r是四面体的内切球半径，则

$$\prod r_1\geqslant 4r^4\tag{10.23}$$

证明 对式(10.19)求积，并运用算术－几何平均值不等式，有

$$r^4\leqslant\prod r_1\cdot\frac{\sqrt{\prod(S-2S_1)}}{S^2}\leqslant\prod r_1\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^4}}{S^2}=\frac{\prod r_1}{4}$$

变形可得式(10.23).证毕.

15*. 设四面体$A_1A_2A_3A_4$的侧面f_i所对应的旁切球的半径为$r_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum r_1\leqslant\frac{8}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R\tag{10.24}$$

证明 在$\triangle A_2A_3A_4$中，由不等式$S_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{36}(a_{23}+a_{24}+a_{34})^2$，有

$$a_{23}+a_{24}+a_{34}\geqslant\frac{6}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{S_1}$$

故由式(10.1)，有 $h_1\leqslant\frac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{a_{23}+a_{24}+a_{34}}\leqslant\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{S(S-2S_1)}}{3\sqrt{S_1}}$

由旁切球半径公式及体积公式$r_1=\frac{3V}{S-2S_1}$，$V=\frac{1}{3}S_1h_1$，有

$$3\sqrt{3V}\ \sqrt{h_1}=3\sqrt{S_1h_1}\ \sqrt{h_1}\leqslant\sqrt[4]{3}\sqrt{S\cdot\frac{3V}{r_1}}$$

所以
$$h_1r_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}S$$

即
$$r_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}S\frac{1}{h_1}$$

注意到不等式 $S\leqslant\frac{8}{\sqrt{3}}R^2$,对上式求和,得

$$\sum r_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}S\sum\frac{1}{h_1}=\frac{\sqrt{3}}{9r}S\leqslant\frac{8}{3}\left(\frac{R}{3r}\right)R$$

证毕.

式(10.24)也可以用式(7.23):$8r^2\leqslant h_ir_i\leqslant\frac{8}{9}R^2\ (i=1,2,3,4)$来证明:

由式(7.23)得 $8r^2\frac{1}{h_i}\leqslant r_i\leqslant\frac{8}{9}R^2\frac{1}{h_i}(i=1,2,3,4)$.

对 i 求和,得 $8r^2\sum\frac{1}{h_i}\leqslant\sum r_i\leqslant\frac{8}{9}R^2\sum\frac{1}{h_i}$.

注意到:$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$,所以

$$8r\leqslant\sum r_i\leqslant\frac{8R^2}{9r}$$

证毕.

16*. $$V^4\leqslant\frac{1}{3^7}S^2\sqrt{\prod S_1\prod(S-2S_1)}\tag{10.25}$$

证明 由式(10.24)的证明可知

$$3\sqrt{S_1}h_1\leqslant\sqrt[4]{3}\sqrt{S(S-2S_1)}$$

注意到体积公式 $3V=S_1h_1$,有

$$3^4V^2\leqslant\sqrt{3}S(S-2S_1)S_1$$

求积变形可得

$$V^4\leqslant\frac{1}{3^7}S^2\sqrt{\prod S_1\prod(S-2S_1)}$$

证毕.由此易得:

17*. $$3^3\cdot2^4r^4\leqslant\sqrt{\prod(S-2S_1)}\tag{10.26}$$

猜测 $\sqrt{\prod(S-2S_1)}\geqslant4V^{\frac{4}{3}}$.

第十一章 涉及四面体内点的不等式

1.(杨世国) 设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,$R_i=|PA_i|(i=1,2,3,4)$,点 P 到四面体各侧面之距离为 $r_i(i=1,2,3,4)$,则有

$$R_1R_2R_3R_4\geqslant 3^4 r_1r_2r_3r_4 \tag{11.1}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且 P 为其内心时等号成立.

证明 延长 A_iP 交顶点 A_i 所对侧面于点 $B_i(i=1,2,3,4)$,并设

$$V=V_{四面体A_1A_2A_3A_4},V_1=V_{四面体PA_2A_3A_4}$$

$$V_2=V_{四面体PA_1A_3A_4},V_3=V_{四面体PA_1A_2A_4},V_4=V_{四面体PA_1A_2A_3}$$

故
$$\frac{A_iB_i}{PB_i}=\frac{V}{V_i}\quad(i=1,2,3,4)$$

于是,由分比定理得

$$\frac{A_iB_i-PB_i}{PB_i}=\frac{V-V_i}{V_i}$$

即
$$\frac{PA_i}{PB_i}=\frac{V-V_i}{V_i}=\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{4}V_k\Big)/V_i \tag{11.2}$$

从而
$$\frac{R_i}{r_i}\geqslant\frac{PA_i}{PB_i}=\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{4}V_k\Big)/V_i\quad(i=1,2,3,4)$$

将以上 4 个不等式相乘,并利用均值不等式,可得

$$\prod_{i=1}^{4}\frac{R_i}{r_i}\geqslant\prod_{i=1}^{4}\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{4}V_k\Big)/V_i\geqslant\prod_{i=1}^{4}\Big(3\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{4}V_k^{\frac{1}{3}}\Big)/V=3^4$$

由以上的证明，我们还可以得到式(11.1)的一个加强.

2. 设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，延长 A_iP 交顶点 A_i 所对侧面于点 B_i，$R_i=|PA_i|$，$l_i=|PB_i|$ $(i=1,2,3,4)$，则有

$$R_1R_2R_3R_4 \geqslant 3^4 l_1l_2l_3l_4 \tag{11.3}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且 P 为其内心时等号成立.

因为对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，由柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{i=1}^{4}x_i^2\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{4}V_k\Big)/V_i=\Big(\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^2}{V_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4}V_i\Big)\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{4}x_i\Big)^2$$

由此并结合恒等式(11.2)，得：

3.（马统一）在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，则对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{R_i}{l_i}\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j \tag{11.4}$$

当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=V_1:V_2:V_3:V_4$ 时取等号.

在式(11.4)中作置换 $x_i\to x_i\sqrt{\dfrac{l_i}{R_i}}$ $(i=1,2,3,4)$，则得：

4. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，则对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\sqrt{\frac{l_il_j}{R_iR_j}} \tag{11.5}$$

当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=\sqrt{\dfrac{R_1}{l_1}}V_1:\sqrt{\dfrac{R_2}{l_2}}V_2:\sqrt{\dfrac{R_3}{l_3}}V_3:\sqrt{\dfrac{R_4}{l_4}}V_4$ 时取等号.

在式(11.5)中，令 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，则得：

5. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sqrt{\frac{l_il_j}{R_iR_j}}\leqslant 2 \tag{11.6}$$

当且仅当 $\sqrt{\dfrac{l_1}{R_1}}:\sqrt{\dfrac{l_2}{R_2}}:\sqrt{\dfrac{l_3}{R_3}}:\sqrt{\dfrac{l_4}{R_4}}=V_1:V_2:V_3:V_4$ 时取等号.

在式(11.4)中作置换 $x_i\to x_i\sqrt{l_i}$ $(i=1,2,3,4)$，可得：

6. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，则对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2R_i\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\sqrt{l_il_j} \tag{11.7}$$

当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=\dfrac{V_1}{\sqrt{l_1}}:\dfrac{V_2}{\sqrt{l_2}}:\dfrac{V_3}{\sqrt{l_3}}:\dfrac{V_4}{\sqrt{l_4}}$ 时取等号.

由恒等式(11.2)知

$$\frac{l_i}{R_i}=\frac{V_i}{V-V_i}\quad (i=1,2,3,4)$$

于是，对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，由柯西不等式，得

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{l_i}{R_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{V_i}{V-V_i}x_i^2=\frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{4}(V-V_i)\right]\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^2}{V-V_i}\right)-\sum_{i=1}^{4}x_i^2\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^2$$

从而，便得：

7. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，则对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{l_i}{R_i}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^2 \tag{11.8}$$

当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=V-V_1:V-V_2:V-V_3:V-V_4$ 时取等号.

注意到 $\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{l_i}{R_i}=\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{l_i+R_i}{R_i}$，于是由式(11.8)，可得：

8. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记 $M_i=|A_iB_i|$，其他符号意义同式(11.3)，则对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\frac{M_i}{R_i}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2 \tag{11.9}$$

当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=V-V_1:V-V_2:V-V_3:V-V_4$ 时取等号.

不等式(11.4)和(11.8)有许多应用. 例如，在式(11.4)中取 $x_i=\sqrt{l_i}\,(i=1,2,3,4)$，可得：

9. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，有

$$\sum_{i=1}^{4}R_i\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sqrt{l_il_j} \tag{11.10}$$

当且仅当 $\sqrt{l_1}:\sqrt{l_2}:\sqrt{l_3}:\sqrt{l_4}=V_1:V_2:V_3:V_4$ 时取等号.

在式(11.4)中取 $x_i=\frac{1}{\sqrt{R_i}}(i=1,2,3,4)$，则有：

10. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，记号意义同式(11.3)，则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{l_i}\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{\sqrt{R_iR_j}} \tag{11.11}$$

当且仅当 $\frac{1}{\sqrt{R_1}}:\frac{1}{\sqrt{R_2}}:\frac{1}{\sqrt{R_3}}:\frac{1}{\sqrt{R_4}}=V_1:V_2:V_3:V_4$ 时取等号.

在式(11.8)中取 $x_i=\frac{1}{\sqrt{l_i}}(i=1,2,3,4)$，可得：

11. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,记号意义同式(11.3),则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{l_i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{l_i}\tag{11.12}$$

当且仅当$\frac{1}{\sqrt{l_1}}:\frac{1}{\sqrt{l_2}}:\frac{1}{\sqrt{l_3}}:\frac{1}{\sqrt{l_4}}=V-V_1:V-V_2:V-V_3:V-V_4$ 时取等号.

在不等式(11.4)和(11.8)中分别取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$,得:

12*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,记号意义同式(11.3),则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{R_i}{l_i}\geqslant 12$$

当且仅当 P 为四面体重心时取等号.

13*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,记号意义同式(11.3),则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{l_i}{R_i}\geqslant\frac{4}{3}$$

当且仅当 P 为四面体重心时取等号.

14*. 设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,延长 A_iP 交对面于 $A'_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$\left(\frac{A_1P}{A_1A'_1}\cdot\frac{A_2P}{A_2A'_2}\cdot\frac{A_3P}{A_3A'_3}\cdot\frac{A_4P}{A_4A'_4}\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant\left(\frac{1}{4}\sum\frac{A_1P}{A_1A'_1}\cdot\frac{A_2P}{A_2A'_2}\cdot\frac{A_3P}{A_3A'_3}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{6}\sum\frac{A_1P}{A_1A'_1}\cdot\frac{A_2P}{A_2A'_2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3}{4}\tag{11.13}$$

证明 设 $V=V_{四面体A_1A_2A_3A_4}$,$V_1=V_{四面体PA_2A_3A_4}$,$V_2=V_{四面体PA_1A_3A_4}$,$V_3=V_{四面体PA_1A_2A_4}$,$V_4=V_{四面体PA_1A_2A_3}$. 于是$\frac{A_iP}{A_iA'_i}=\frac{V-V_i}{V}=1-\frac{V_i}{V}(1\leqslant i\leqslant 4)$. 因此 $\sum\frac{A_iP}{A_iA'_i}=4-\sum\frac{V_1}{V}=3$.

由麦克劳林不等式:$\left(\frac{c_4}{C_4^4}\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant\left(\frac{c_3}{C_4^3}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\frac{c_2}{C_4^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{c_1}{4}$(其中 c_i 为四个正数的初等对称函数),即可得到式(11.13).

15*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球和内切球的半径分别为 R 和 r,其内一点 P 到各侧面的距离为 $d_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2}\geqslant\frac{2}{r^2}+\frac{9}{2rR}+\frac{3\sqrt[3]{3}}{2r^{\frac{2}{3}}R^{\frac{4}{3}}}\tag{11.14}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$,考虑

$$V^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{4} V_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\right) =$$

$$\frac{1}{9}\left[\left(\sum_{i=1}^{4} V_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left(\frac{V_i}{V_j}S_j^2 + \frac{V_j}{V_i}S_i^2\right) + \right.$$

$$\left. 2\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\sum\limits_{\substack{k<l \\ k,l\neq i}} V_k V_l}{V_i}\right] S_i^2\right] =$$

$$\frac{1}{9}(Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3) \tag{11.15}$$

由柯西不等式知

$$Q_1 = \left(\sum_{i=1}^{4} V_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2$$

由算术 — 几何平均值不等式知

$$Q_2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left(\frac{V_i}{V_j}S_j^2 + \frac{V_j}{V_i}S_i^2\right) \geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\sum\limits_{\substack{k<l \\ k,l\neq i}} V_k V_l}{V_i}\right] S_i^2 \geqslant 3\sum\left[\frac{\sqrt[3]{\prod\limits_{j\neq i} V_j^2}}{V_i^2}\right] S_i^2 \geqslant 12\sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} S_i^2} = 12\sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}$$

由不等式$\frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{4} S_i^2$ 得

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i} \geqslant \frac{3^{\frac{7}{4}}}{4}\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{4} S_i^2}\, V \geqslant \frac{3^{\frac{7}{4}}}{4^{\frac{5}{4}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{4} S_i} \cdot V$$

及不等式
$$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}$$

所以
$$V^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{1}{9}\left[\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j + 24\sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}\right] =$$

$$\frac{1}{9}\left\{2\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 + \left[\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{4} S_i^2\right] + 24\sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}\right\} \geqslant$$

$$\frac{1}{9}\left[2\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 + 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}} + 24 \cdot \frac{3^{\frac{7}{4}}}{4^{\frac{5}{4}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{4} S_i} \cdot V\right]$$

注意到熟知的公式 $r = \dfrac{3V}{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}$,及不等式 $V \leqslant \dfrac{8\sqrt{3}}{9}rR^2$,有

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{1}{9}\left[2\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}{V}\right)^2 + \frac{18\sqrt[3]{3}}{V^{\frac{2}{3}}} + 24 \cdot \frac{3^{\frac{7}{4}}}{4^{\frac{5}{4}}} \cdot \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}{V}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}}\right] \geqslant$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{18}{r^2}+32\cdot\frac{3^{\frac{7}{4}}}{4^{\frac{5}{4}}}\cdot\sqrt{\frac{3}{r}}\cdot\sqrt{\frac{9}{8\sqrt{3}\,rR^2}}\right)=\frac{2}{r^2}+\frac{9}{2rR}+\frac{3\sqrt[3]{3}}{2r^{\frac{2}{3}}R^{\frac{4}{3}}}$$

证毕.

在式(11.14)中将 $3r\leqslant R$ 代入$\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2r^{\frac{2}{3}}R^{\frac{4}{3}}}\geqslant\dfrac{9}{2R^2}$ 可得:

16*.
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2}\geqslant\frac{2}{r^2}+\frac{9}{2rR}+\frac{9}{2R^2}\tag{11.16}$$

在式(11.16)中将 $3r\leqslant R$ 代入$\dfrac{9}{2rR}\geqslant\dfrac{27}{2R^2}$,可得:

17.(冷岗松)
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2}\geqslant\frac{2}{r^2}+\frac{18}{R^2}\tag{11.17}$$

猜测
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2}\geqslant\frac{2}{r^2}+\frac{6}{Rr}\tag{11.18}$$

利用同样的方法我们还可以得到如下的结果.

18*.设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球和内切球的半径分别为 R 和 r,其内一点 P 到各侧面的距离为 $r_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i}\geqslant\frac{2}{r}+\frac{2\times 3^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{3}}R^{\frac{2}{3}}}\tag{11.19}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,令$\sqrt{s}=\sum\limits_{i=1}^{4}\sqrt{S_i}$,$\lambda_i=\dfrac{1}{\sqrt{S_i}}(\sqrt{s}-2\sqrt{S_i})$ $(i=1,2,3,4)$,同式(12.21)可证明

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4\geqslant 32$$

由式(2.61),有 $3^{\frac{7}{6}}\times 2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{3}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_iS_i$,于是

$$\begin{aligned}&(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}+\sqrt{S_4})^2-2(S_1+S_2+S_3+S_4)=\\&\lambda_1S_1+\lambda_2S_2+\lambda_3S_3+\lambda_4S_4\geqslant\\&3^{\frac{7}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{3}}\geqslant 4\times 3^{\frac{7}{6}}V^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned}V\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}V_i\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i}{V_i}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}\sqrt{S_i}\right)^2=\\\frac{1}{3}\left[2\sum_{i=1}^{4}S_i+\left(\sum_{i=1}^{4}\sqrt{S_i}\right)^2-2\sum_{i=1}^{4}S_i\right]\geqslant\\\frac{1}{3}\left(2\sum_{i=1}^{4}S_i+4\times 3^{\frac{7}{6}}V^{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2\sum_{i=1}^{4}S_i}{V}+\frac{4\times 3^{\frac{7}{6}}}{V^{\frac{1}{3}}}\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{6}{r}+4\times 3^{\frac{7}{6}}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{8\sqrt{3}\,rR^2}}\right)=$$

$$\frac{2}{r}+\frac{2\times 3^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{3}}R^{\frac{2}{3}}}$$

在式(11.19)中将 $3r\leqslant R$ 代入 $\frac{2\times 3^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{3}}R^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{6}{R}$,得:

19*.
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i}\geqslant\frac{2}{r}+\frac{6}{R}\tag{11.20}$$

众所周知,正四面体内任一点到四个侧面距离之和等于该四面体的高,而在四面体中我们有:

20*. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,过顶点 A_i 的高为 h_i,其内任意一点 P 到各侧面的距离为 $d_i(i=1,2,3,4)$,则

$$d_1+d_2+d_3+d_4\leqslant\max\{h_1,h_2,h_3,h_4\}\tag{11.21}$$

证明 设 $S_1=\min\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$,则 $h_1=\max\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$. 于是

$$\frac{1}{3}S_1(d_1+d_2+d_3+d_4)\leqslant\frac{1}{3}S_1d_1+\frac{1}{3}S_2d_2+\frac{1}{3}S_3d_3+\frac{1}{3}S_4d_4=$$

$$V=\frac{1}{3}S_1h_1$$

因此 $d_1+d_2+d_3+d_4\leqslant h_1$. 证毕.

21*. 设 r_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到棱 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的距离,$R_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 是点 P 到顶点 A_i 的距离,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}r_{ij}^2<\sum_{i=1}^{4}R_i^2\tag{11.22}$$

且系数 1 是最佳的.

先证明一个引理.

引理 11.1 在行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

中,(1)$a_{ii}(i=1,2,3,4)$ 都是正的,其余的数都是负的;(2)$s_k=$

$\sum\limits_{i=1}^{4} a_{ki}\ (k=1,2,3,4)$ 都是正的，则

$$|A|>0 \tag{11.23}$$

证明 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & s_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & s_4 \end{vmatrix}=$

$$-s_1M_{14}+s_2M_{24}-s_3M_{34}+s_4M_{44}$$

其中 M_{i4} 是 a_{i4} 的代数余子式.

$$M_{14}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned} & a_{21}a_{32}a_{43}+a_{22}a_{33}a_{41}+a_{31}a_{42}a_{23}- \\ & a_{23}a_{32}a_{41}-a_{22}a_{31}a_{43}-a_{33}a_{42}a_{21}= \\ & (a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})a_{41}+a_{21}a_{32}a_{43}+ \\ & a_{31}a_{42}a_{23}-a_{22}a_{31}a_{43}-a_{33}a_{42}a_{21} \end{aligned}$$

$$a_{22}+a_{23}>0,a_{22}>-a_{23}>0,\text{同理 } a_{33}>-a_{32}>0$$

所以 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}>0$，又 $a_{41}<0$，故 $(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})a_{41}<0$. 又知上述和中其余各项均为负值 所以 $M_{14}<0$.

同理可证 $M_{24}>0,M_{34}<0,M_{44}>0$.

注意到 $s_k>0(k=1,2,3,4)$，所以 $|A|>0$.

现在证明原不等式. 设 $\langle\overrightarrow{PA_i},\overrightarrow{PA_j}\rangle=\alpha_{ij}\ (1\leqslant i<j\leqslant 4)$.

考虑对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{14}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{21}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{23}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{24}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{31}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{32}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{34}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{41}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{42}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{43}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}\ (1\leqslant i<j\leqslant 4)$.

先证明在 $\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}$ 中必有两个角的和大于或等于 π. 不妨设 α_{12},α_{13} 均为锐角，则 α_{14} 必为钝角.

分别过 $\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA_2};\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA_3};\overrightarrow{PA_2},\overrightarrow{PA_3}$ 作平面. 因为 P 在四面体的内部，所以 $\overrightarrow{PA_4}$ 在三面角 $P\text{-}A_1A_2A_3$ 的对顶三面角内或面上. 过 PA_1,PA_4 作平面交

棱 A_2A_3 于点 B,设 PA_4 的反向延长线为 PA'_4,则

$$\pi=\angle A_4PA_1+\angle A_1PA'_4\leqslant\angle A_4PA_1+\angle A_1PB\leqslant$$
$$\angle A_4PA_1+\max\{\angle A_1PA_2,\angle A_1PA_3\}$$

不妨设 $\alpha_{13}+\alpha_{14}=\angle A_1PA_3+\angle A_1PA_4\geqslant\pi$,则

$$\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{14}}{2}=\frac{1}{2}(\cos\alpha_{13}+1)+\frac{1}{2}(\cos\alpha_{14}+1)=$$
$$1+\cos\frac{\alpha_{13}+\alpha_{14}}{2}\cos\frac{\alpha_{13}-\alpha_{14}}{2}\leqslant 1$$

于是
$$1-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{14}}{2}\right)>0$$

同理可证
$$1-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha_{21}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{23}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{24}}{2}\right)>0$$
$$1-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha_{31}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{32}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{34}}{2}\right)>0$$
$$1-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha_{41}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{42}}{2}+\cos^2\frac{\alpha_{43}}{2}\right)>0$$

由引理知 $|\boldsymbol{A}|>0$.

又
$$\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}\\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{21}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{23}}{2}\\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{31}}{2} & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{32}}{2} & 1\end{vmatrix}=$$
$$1-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{23}}{2}-$$
$$\frac{1}{4}\cos^4\frac{\alpha_{12}}{2}-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\alpha_{13}}{2}-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\alpha_{23}}{2}=$$
$$\frac{1}{4}\left(1-\cos^4\frac{\alpha_{12}}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\cos^4\frac{\alpha_{13}}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\cos^4\frac{\alpha_{23}}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{13}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{23}}{2}\right)>0$$

同理可以证明其余三阶主子式为正的;

又 $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2}\\ -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_{12}}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\alpha_{12}}{2}>0$. 同理可以证明其余二阶主子式为正的.

综上得,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的,所以

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}<\sum_{i=1}^{4}R_i^2$$

记 t_{ij} 为 $\triangle A_iPA_j$ 的 $\angle A_iPA_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的平分线的长，注意到

$$t_{ij}=\frac{2R_iR_j}{R_i+R_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}\leqslant\sqrt{R_iR_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)$$

有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_{ij}^2<\sum_{i=1}^{4}R_i^2$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的底面 $\triangle A_2A_3A_4$ 缩成一个点，P 取为点 A_1，这时

$$R_2=R_3=R_4,r_{23}=r_{24}=r_{34}=R_2,R_1=r_{12}=r_{13}=r_{14}=0$$

不等式两边相等，所以系数 1 是最好的.

22*. 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部任意一点，O 到棱 A_iA_j 的距离为 $r_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，$|OA_i|=R_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}r_{ij}<\frac{3\sqrt{2}}{4}\sum_{i=1}^{4}R_i \tag{11.24}$$

证明 设 l_{ij} 是 $\triangle A_iOA_j$ 的 $\angle A_iOA_j$ 的平分线长，记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}$，则

$$r_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant\sqrt{R_iR_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)$$

利用式(2.25)，柯西不等式和麦克劳林不等式，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}r_{ij}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sqrt{R_iR_j}\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}\leqslant\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}}<$$
$$\sqrt{3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j}\leqslant\sqrt{3\cdot\frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{4}R_i\right)^2}=$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{4}\sum_{i=1}^{4}R_i$$

证毕.

系数 $\frac{3\sqrt{2}}{4}=1.066\ 017\ 2\cdots$.

猜测 系数最好为 1. 此即为陈计于 1993 年提出的一个猜想.

23*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内一点到顶点 A_i 及 A_i 所对的侧面的距离分别为 l_i,d_i，顶点 A_i 到侧面 f_i 的距离为 $h_i(i=1,2,3,4)$，$k\geqslant\frac{3}{4}$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{l_i}{2h_i+d_i}\right)^k\geqslant\frac{4}{3^k} \tag{11.25}$$

证明 如图 11.1 所示，作 $A_1H_1\perp$ 面 $A_2A_3A_4$ 于点 H_1，作 $PE\perp A_1H_1$ 于点 E，作 $PD_1\perp$ 平面 $A_2A_3A_4$ 于点 D_1，则 $A_1P=l_1,PD_1=d_1,A_1H_1=h_1$，于是

$$S_1l_1+S_1d_1\geqslant S_1(A_1E+d_1)=S_1h_1=3V$$

从而

$$S_1l_1\geqslant 3V-3V_{四面体PA_2A_3A_4}$$

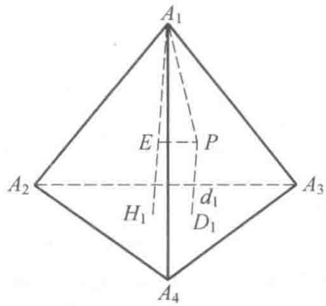


图 11.1

同理
$$S_2 l_2 \geqslant 3V - 3V_{四面体 PA_1A_3A_4}$$
$$S_3 l_3 \geqslant 3V - 3V_{四面体 PA_1A_2A_4}, S_4 l_4 \geqslant 3V - 3V_{四面体 PA_1A_2A_3}$$
于是
$$S_2 l_2 + S_3 l_3 + S_4 l_4 \geqslant 9V - 3(V_{四面体 PA_1A_2A_4} + V_{四面体 PA_1A_3A_4} + V_{四面体 PA_1A_2A_3}) =$$
$$6V + 3V_{\triangle A_2A_3A_4} = S_1(2h_1 + d_1)$$
即
$$\frac{l_1}{2h_1 + d_1} \geqslant \frac{S_1 l_1}{S_2 l_2 + S_3 l_3 + S_4 l_4}$$
同理 $\frac{l_2}{2h_2 + d_2} \geqslant \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1 + S_3 l_3 + S_4 l_4}, \frac{l_3}{2h_3 + d_3} \geqslant \frac{S_3 l_3}{S_1 l_1 + S_2 l_2 + S_4 l_4}$

令
$$x_i = S_i l_i (i = 1, 2, 3, 4), a = \sum x_1$$
由
$$3x_i (a - x_i)^3 \leqslant \left[\frac{3x_i + 3(a - x_i)}{4}\right]^4 = \left(\frac{3a}{4}\right)^4$$
有
$$\left(\frac{x_i}{a - x_i}\right)^k \geqslant \frac{4^{\frac{4k}{3}}}{3^k} \left(\frac{x_i}{a}\right)^{\frac{4k}{3}}$$
求和，得 $\sum \left(\frac{x_i}{a - x_i}\right)^k \geqslant \frac{4^{\frac{4k}{3}}}{3^k} \sum \left(\frac{x_i}{a}\right)^{\frac{4k}{3}} \geqslant \frac{4^{\frac{4k}{3}}}{3^k} \cdot 4 \left[\frac{\sum x_i}{4a}\right]^{\frac{4k}{3}} = \frac{4}{3^k}$（其中 $k \geqslant \frac{3}{4}$）.

于是，有 $\sum\limits_{i=1}^{4} \left(\frac{l_i}{2h_i + d_i}\right)^k \geqslant \sum \left(\frac{x_i}{a - x_i}\right)^k \geqslant \frac{4}{3^k}$. 证毕.

24. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面面积为 $S_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$，点 P 是四面体内部任意一点，记 $R_i = |PA_i| (i = 1, 2, 3, 4)$，则
$$\sum S_1 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum R_i^2 \tag{11.26}$$
当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且点 P 为重心时取等号.

证明 由三角形中的 Weitzenböck 不等式 $4\sqrt{3}\Delta \leqslant \sum a^2$，有
$$\sum S_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij}^2$$

由式(1.29)有$\sum\limits_{i=1}^{4}m_i^2=\frac{4}{9}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2$,所以

$$\sum S_1\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}\sum m_i^2$$

又由式(16.30),当G为四面体$A_1A_2A_3A_4$的重心时,有

$$\sum_{i=1}^{4}GA_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{4}PA_i^2$$

而$GA_i=\frac{3}{4}m_i(i=1,2,3,4)$,所以

$$\sum m_i^2=\frac{16}{9}\sum_{i=1}^{4}GA_i^2\leqslant\frac{16}{9}\sum_{i=1}^{4}PA_i^2$$

于是有

$$\sum S_1\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}\sum m_i^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sum PA_i^2$$

证毕.

25*. 设G是四面体$A_1A_2A_3A_4$的重心,A'_1,A'_2,A'_3,A'_4分别是A_1G,A_2G,A_3G,A_4G与四面体$A_1A_2A_3A_4$外接球面的交点,则

$$GA'_1+GA'_2+GA'_3+GA'_4\geqslant A_1G+A_2G+A_3G+A_4G \quad (11.27)$$

当且仅当四面体$A_1A_2A_3A_4$为正四面体时取等号.

证明 如图11.2所示,G_1为底面f_1的重心,D为A_2A_3的中点,E为A_4G_1与$\triangle A_2A_3A_4$外接圆的交点.要证明式(11.27)可转化为证明

$$\sum A_1A'_1\geqslant\frac{3}{2}\sum m_1 \quad (11.28)$$

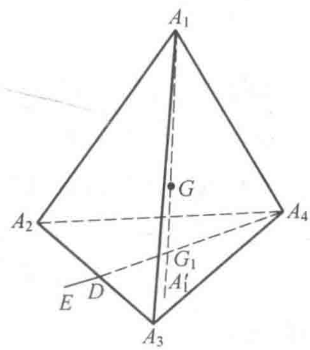


图11.2

设$A_1A'_1=M_1$等.由相交弦定理可知

$$\begin{aligned}m_1(M_1-m_1)&=A_4G_1\cdot G_1E=\\&\frac{2}{3}A_4D\cdot\left(\frac{1}{3}A_4D+DE\right)=\\&\frac{2}{9}A_4D^2+\frac{2}{3}A_4D\cdot DE=\\&\frac{2}{9}A_4D^2+\frac{2}{3}\left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2=\\&\frac{1}{2}A_4G_1^2+\frac{1}{6}A_2A_3^2\end{aligned}$$

同理 $m_1(M_1-m_1)=\frac{1}{2}A_3G_1^2+\frac{1}{6}A_2A_4^2$,$m_1(M_1-m_1)=\frac{1}{2}A_4G_1^2+\frac{1}{6}A_2A_3^2$.

以上三式相加得

$$3m_1(M_1-m_1)=\frac{1}{2}(A_2G_1^2+A_3G_1^2+A_4G_1^2)+\frac{1}{6}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)=$$

$$\frac{1}{3}(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2) \tag{11.29}$$

又由于
$$\frac{9}{4}m_1^2=\frac{3}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2-(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2) \tag{11.30}$$

令 $k=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2$. 由式(11.29),(11.30)消去项 $a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2$,整理得

$$M_1=\frac{1}{12}\left(\frac{k}{m_1}+9m_1\right)\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{k}$$

同理
$$M_2\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{k},M_3\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{k},M_4\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{k}$$

所以 $\sum M_1\geqslant 2\sqrt{k}=3\sqrt{\sum m_1^2}\geqslant\frac{3}{2}\sum m_1$. 证毕.

26. 外心线问题[17]:过四面体的一个顶点和外接球球心的直线与这个顶点所对面交于一点,该顶点与交点间的线段叫作四面体的一条外心线.

性质 设 O 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球的球心,直线 A_iO 与顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的交点为 A'_i,记 $e_i=|A_iA'_i|$ $(i=1,2,3,4)$,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球半径为 R,则

$$\sum\frac{1}{e_1}=\frac{3}{R} \tag{11.31}$$

证明 记 $V=V_{四面体A_1A_2A_3A_4}$,$V_1=V_{四面体OA_2A_3A_4}$,$V_2=V_{四面体OA_1A_3A_4}$,$V_3=V_{四面体OA_1A_2A_4}$,$V_4=V_{四面体OA_1A_2A_3}$.

当 O 在四面体内时,$\frac{V_i}{V}=\frac{|A_iA'_i|-R}{|A_iA'_i|}=1-\frac{R}{e_i}$,即

$$\frac{R}{e_i}=1-\frac{V_i}{V}\quad(i=1,2,3,4)$$

求和,得
$$\sum\frac{R}{e_i}=4-\sum\frac{V_i}{V}=3$$

即
$$\sum\frac{1}{e_1}=\frac{3}{R}$$

当 O 在四面体外时,不妨设 O 在侧面 f_1 之外,则

$$\frac{V_1}{V}=\frac{R-|A_1A'_1|}{|A_1A'_1|}=\frac{R}{e_1}-1$$

其余的有
$$\frac{V_i}{V}=1-\frac{R}{e_i}\quad(i=2,3,4)$$

于是
$$1=\frac{V}{V}=\frac{V_2}{V}+\frac{V_3}{V}+\frac{V_4}{V}-\frac{V_1}{V}=4-\sum\frac{R}{e_1}$$

变形可得$\sum \frac{1}{e_1}=\frac{3}{R}$.证毕.

下面利用性质证明几个关于外心线的不等式.

(1) 符号同性质:

当$\lambda>1$,或$\lambda<0$时

$$\sum \frac{1}{e_1^{\lambda}} \geqslant \frac{3^{\lambda} 4^{1-\lambda}}{R^{\lambda}} \tag{11.32}$$

当$0<\lambda<1$时

$$\sum \frac{1}{e_1^{\lambda}} \leqslant \frac{3^{\lambda}}{4^{\lambda} R^{\lambda}} \tag{11.33}$$

证明 当$\lambda>1$,或$\lambda<0$时,由式(1.33)及幂平均不等式,有

$$\sum \frac{1}{e_1^{\lambda}} \geqslant 4\left(\frac{1}{4} \sum \frac{1}{e_1}\right)^{\lambda}=\frac{3^{\lambda} 4^{1-\lambda}}{R^{\lambda}}$$

当$0<\lambda<1$时,由式(1.34)及幂平均不等式,有

$$\sum \frac{1}{e_1^{\lambda}} \leqslant 4\left(\frac{1}{4} \sum \frac{1}{e_1}\right)^{\lambda}=\frac{3^{\lambda} 4^{1-\lambda}}{R^{\lambda}}$$

证毕.

(2) 符号同性质,则

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{e_i e_j} \leqslant \frac{27}{8 R^2} \tag{11.34}$$

证明 由式(1.37)及麦克劳林不等式,有

$$\frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{e_i e_j} \leqslant\left(\frac{1}{4} \sum \frac{1}{e_1}\right)^2=\left(\frac{3}{4 R}\right)^2$$

所以

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{e_i e_j} \leqslant 6\left(\frac{1}{4} \sum \frac{1}{e_1}\right)^2=\frac{27}{8 R^2}$$

由式(11.31),再利用算术-几何平均值不等式易得如下不等式:

(3)* 符号同性质,则

$$e_1 e_2 e_3 e_4 \geqslant \frac{2^8}{3^4} R^4 \tag{11.35}$$

27*.内心线问题:过四面体的一个顶点和内切球球心的直线与这个顶点所对面交于一点,该顶点与交点间的线段叫作四面体的一条内心线.

(1) 设I是四面体$A_1A_2A_3A_4$内切球的球心,直线A_iI与顶点A_i所对的侧面f_i的交点为A'_i,记$p_i=|A_iA'_i|$ $(i=1,2,3,4)$,四面体$A_1A_2A_3A_4$内切球半径为r,则

$$\sum \frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{r} \tag{11.36}$$

证明 记$V=V_{\text{四面体} A_1 A_2 A_3 A_4}$, $V_1=V_{\text{四面体} I A_2 A_3 A_4}$, $V_2=V_{\text{四面体} I A_1 A_3 A_4}$, $V_3=$

$V_{\text{四面体}OA_1A_2A_4}$，$V_4 = V_{\text{四面体}OA_1A_2A_3}$.

因为 I 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心，所以 I 在四面体的内部. 于是

$$\frac{r}{|A_iA'_i|} \leqslant \frac{|A'_iI|}{|A_iA'_i|} = \frac{V_i}{V} \quad (i=1,2,3,4)$$

求和，得

$$\sum \frac{r}{|A_iA'_i|} \leqslant \sum \frac{V_i}{V} = 1$$

即

$$\sum \frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{r}$$

证毕.

(2) 符号同式(11.36). 当 $0 < \lambda < 1$ 时，有

$$\sum \frac{1}{p_1^{\lambda}} \leqslant \frac{4^{1-\lambda}}{r^{\lambda}} \tag{11.37}$$

证明 当 $0 < \lambda < 1$ 时，由式(1.34)及幂平均不等式，有

$$\sum \frac{1}{p_1^{\lambda}} \leqslant 4\left(\frac{1}{4}\sum \frac{1}{p_1}\right)^{\lambda} = \frac{4^{1-\lambda}}{r^{\lambda}}$$

证毕.

(3) 符号同式(11.36)，则

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{p_ip_j} \leqslant \frac{3}{8r^2} \tag{11.38}$$

证明 由麦克劳林不等式(1.37)，有

$$\frac{1}{6}\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{p_ip_j} \leqslant \left(\frac{1}{4}\sum \frac{1}{p_1}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{4r}\right)^2$$

即

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \frac{1}{p_ip_j} \leqslant \left(\frac{1}{4}\sum \frac{1}{e_1}\right)^2 = \frac{3}{8r^2}$$

证毕.

由式(11.36)，再利用算术－几何平均值不等式易证如下不等式：

(4) 符号同式(11.36)，则

$$p_1p_2p_3p_4 \geqslant 2^8 r^4 \tag{11.39}$$

28. 设 I 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内切球的球心，直线 A_iI 与顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的交点为 $A'_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\frac{1}{4} < \frac{A_1I}{A_1A'_1} \cdot \frac{A_2I}{A_2A'_2} \cdot \frac{A_3I}{A_3A'_3} \cdot \frac{A_4I}{A_4A'_4} \leqslant \frac{81}{128} \tag{11.40}$$

证明 令 $x_i = \dfrac{S_i}{S}(i=1,2,3,4)$，则

$$\frac{A_iI}{A_iA'_i} = \frac{h_i - r}{h_i} = 1 - \frac{r}{h_i} = 1 - x_i \quad (i=1,2,3,4)$$

所以 $\dfrac{A_1I}{A_1A'_1} \cdot \dfrac{A_2I}{A_2A'_2} \cdot \dfrac{A_3I}{A_3A'_3} \cdot \dfrac{A_4I}{A_4A'_4} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) =$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j - \sum x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

由算术－几何平均值不等式，有

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \leqslant \frac{81}{128}$$

又由于 S_i 是四面体的侧面积，所以 $0 < x_i < \frac{1}{2}(i=1,2,3,4)$，故

$$\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\left(\frac{1}{2}-x_3\right)\left(\frac{1}{2}-x_4\right)=$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j - \frac{1}{2}\sum x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4 > 0$$

即
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j - 2\sum x_1 x_2 x_3 + 4x_1 x_2 x_3 x_4 > \frac{1}{4}$$

易知 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j - \sum x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4 > \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j - 2\sum x_1 x_2 x_3 + 4x_1 x_2 x_3 x_4$. 因此

$$\frac{1}{4} < \frac{A_1 I}{A_1 A'_1}\cdot\frac{A_2 I}{A_2 A'_2}\cdot\frac{A_3 I}{A_3 A'_3}\cdot\frac{A_4 I}{A_4 A'_4} \leqslant \frac{81}{128}$$

证毕.

29.（单墫）设 P 是四面体 $ABCD$ 内一点，则

$$\frac{1}{3}\sigma < PA + PB + PC + PD < \sigma \tag{11.41}$$

其中 σ 表示四面体的六条棱之和且系数 1/3 和 1 都是最佳的.

证明　(1) 由三角形的性质 $AB < PA + PB$，这样的不等式可以得到六个，其中 PA, PB, PC, PD 各出现三次，所以

$$3(PA + PB + PC + PD) > \sigma$$

即
$$\frac{1}{3}\sigma < PA + PB + PC + PD$$

(2) 过点 P 作平面与 AB 及 CD 平行，这平面与 CA, AD, DB, BC 分别交于点 E, F, G, H，易证四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

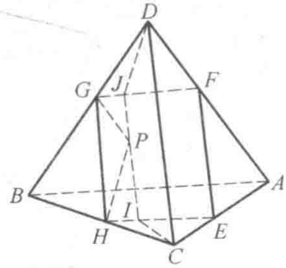


图 11.3

又设平面 CDP 与平面 $EFGH$ 的交线为 IJ，点 I 在 EH 上，点 J 在 GF 上（图 11.3）. 显然 $CD > EF = IJ$，所以

$$PC + PD < (PI + CI) + (PJ + DJ) = IJ + CI + DJ < CD + CI + DJ$$

又
$$DJ < DG + DF, CI < CE + CH$$

所以
$$PC + PD < CD + DG + DF + CH + CE$$

同理

$$PA + PB < AB + BG + AF + BH + AE$$

相加既得

$$PA + PB + PC + PD < \sigma$$

(3) 式(11.41)右边的系数1不能改变. 设想 $\triangle ABC$ 固定,而 $D, P \to \infty$,但 D, P 很近.

式(11.41)左边系数$\frac{1}{3}$也不能改变. 设想AB固定,C, D, P均趋于AB上一固定点 E.

30*. 设点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,记 $R_i = |PA_i|(i=1,2,3,4)$,则

$$\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant \sum R_i^2 < \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \tag{11.42}$$

左边不等式当 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心时取等号,右边不等式的系数1是最佳的.

证明 在 $\triangle A_iPA_j$ 中,由余弦定理 $a_{ij}^2 = R_i^2 + R_j^2 - 2R_iR_j\cos\angle A_iPA_j (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$. 相加得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 = 3\sum R_1^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j$$

建立空间直角坐标系,设 $A_i(x_i, y_i, z_i)$ $(x_i, y_i, z_i > 0, i=1,2,3,4)$,点 P 的重心规范坐标为$(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_3)$,其中 $\sum\lambda_1 = 1(\lambda_i > 0)$,则点 P 的直角坐标为$(\sum\lambda_1x_1, \sum\lambda_1y_1, \sum\lambda_1z_1)$. 于是

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} (\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_j}) =$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left[\sum(x_i - \sum\lambda_1x_1)(x_j - \sum\lambda_1x_1)\right] =$$
$$\sum\left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - 3\sum x_1\sum\lambda_1x_1 + 6\left(\sum\lambda_1x_1\right)^2\right]$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j - \sum R_1^2 =$$
$$\sum\left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - \sum x_1^2 - \sum x_1\sum\lambda_1x_1 + 2\left(\sum\lambda_1x_1\right)^2\right]$$

不妨设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,易知 $x_1 \leqslant \sum\lambda_1x_1 \leqslant x_4$. 考虑二次函数

$$f(x) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - \sum x_1^2 - x\sum x_1 + 2x^2$$

因为

$$f(x_1) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - \sum x_1^2 - x_1\sum x_1 + 2x_1^2 =$$
$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \leqslant 0$$

同理 $f(x_4)\leqslant 0$. 所以 $f\left(\sum\lambda_1 x_1\right)<0$,故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j-\sum R_1^2<0$$

因此

$$\sum R_i^2<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2$$

又因为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j+\frac{1}{2}\sum R_1^2=$$
$$\sum\left[\frac{1}{2}\left(\sum x_1\right)^2-4\sum x_1\sum\lambda_1x_1+8\left(\sum\lambda_1x_1\right)^2\right]$$

考虑二次函数

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\sum x_1\right)^2-4x\sum x_1+8x^2$$

易知

$$g\left(\frac{1}{4}\sum\lambda_1x_1\right)\geqslant g\left(\frac{1}{4}\sum x_1\right)=0$$

即

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} R_iR_j\cos\angle A_iPA_j\geqslant-\frac{1}{2}\sum R_1^2$$

故

$$\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\leqslant\sum R_i^2$$

左边取等号的条件是显然的. 对于右边,取 $P=A_1$,让 $A_2,A_3,A_4\to A$ 时取等号. 证毕.

猜想 $\sum R_i^k<\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^k\ (k\geqslant 1,k\in\mathbf{N})$.

31*. 设 I 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心,则

$$\sum_{i=1}^4 S_i\,|IA_i|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^4 S_i\right)R^2\tag{11.43}$$

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 为三维笛卡儿坐标系原点,则

$$\overrightarrow{OI}=\sum_{i=1}^4 S_i\,\overrightarrow{OA_i}\left(\sum_{i=1}^4 S_i\right)^{-1}$$

其中

$$|\overrightarrow{OA_i}|=R\quad(i=1,2,3,4)$$

于是

$$\sum_{i=1}^4 S_i\,|IA_i|^2=\sum_{i=1}^4 S_i\,(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA_i})^2=\sum_{i=1}^4 S_i(\overrightarrow{OI}^2+\overrightarrow{OA_i}^2-2\,\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA_i})=$$
$$\sum_{i=1}^4 S_i\,\overrightarrow{OI}^2+\sum_{i=1}^4 S_iR^2-2\,\overrightarrow{OI}\cdot\sum_{i=1}^4 S_i\,\overrightarrow{OA_i}=$$
$$\sum_{i=1}^4 S_i\,\overrightarrow{OI}^2+\sum_{i=1}^4 S_iR^2-2\,\overrightarrow{OI}^2\sum_{i=1}^4 S_i=$$
$$\sum_{i=1}^4 S_iR^2-\overrightarrow{OI}^2\sum_{i=1}^4 S_i\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^4 S_iR^2$$

第十二章 涉及两个四面体的不等式

1. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的棱长分别为 $|A_iA_j|=a_{ij}$ 和 $|B_iB_j|=b_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，体积分别为 V 和 V'，则

$$(1)\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\Big(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-2b_{ij}^2\Big)\geqslant 288\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac{2}{3}}\quad(12.1)$$

$$(2)\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}\Big(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}-2b_{ij}\Big)\geqslant 48\sqrt[3]{9}\,(VV')^{\frac{1}{3}}\quad(12.2)$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时等号成立.

式(12.1)的证明　记四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的面积为 S_i，四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的顶点 B_i 所对的侧面 f'_i 面积为 S'_i，由三角形中的 Neuberg-Pedoe 不等式

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant 16\Delta_1\Delta_2$$

有

$$a_{23}^2(-b_{23}^2+b_{24}^2+b_{34}^2)+a_{24}^2(b_{23}^2-b_{24}^2+b_{34}^2)+$$
$$a_{34}^2(b_{23}^2+b_{24}^2-b_{34}^2)\geqslant 16S_1S'_1$$
$$a_{13}^2(-b_{13}^2+b_{14}^2+b_{34}^2)+a_{24}^2(b_{13}^2-b_{14}^2+b_{34}^2)+$$
$$a_{34}^2(b_{13}^2+b_{24}^2-b_{34}^2)\geqslant 16S_2S'_2$$
$$a_{12}^2(-b_{12}^2+b_{14}^2+b_{24}^2)+a_{14}^2(b_{12}^2-b_{14}^2+b_{24}^2)+$$
$$a_{34}^2(b_{12}^2+b_{14}^2-b_{24}^2)\geqslant 16S_3S'_3$$
$$a_{12}^2(-b_{12}^2+b_{13}^2+b_{23}^2)+a_{13}^2(b_{12}^2-b_{13}^2+b_{23}^2)+$$
$$a_{23}^2(b_{12}^2+b_{13}^2-b_{23}^2)\geqslant 16S_4S'_4$$

将这四个不等式相加并凑项，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\Big(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-2b_{ij}^2\Big)\geqslant(a_{12}^2+a_{34}^2)(b_{12}^2+b_{34}^2)+(a_{13}^2+a_{24}^2)(b_{13}^2+b_{24}^2)+(a_{14}^2+a_{23}^2)(b_{14}^2+b_{23}^2)+16\sum_{i=1}^4 S_iS'_i=(\mathrm{I})+(\mathrm{II})$$

其中

$$(\mathrm{I})=(a_{12}^2+a_{34}^2)(b_{12}^2+b_{34}^2)+(a_{13}^2+a_{24}^2)(b_{13}^2+b_{24}^2)+(a_{14}^2+a_{23}^2)(b_{14}^2+b_{23}^2)$$

$$(\mathrm{II})=16\sum_{i=1}^4 S_iS'_i$$

由算术一几何平均值不等式，结合熟知的不等式：$72V^2\leqslant a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34}$ 和 $V\leqslant\left(\frac{4^3}{3^7}\right)^{\frac14}\prod_{i=1}^4 S_i^{\frac38}$，有

$$\begin{aligned}&(a_{12}^2+a_{34}^2)(b_{12}^2+b_{34}^2)+(a_{13}^2+a_{24}^2)(b_{13}^2+b_{24}^2)+(a_{14}^2+a_{23}^2)(b_{14}^2+b_{23}^2)\geqslant\\&4a_{12}a_{34}\cdot b_{12}b_{34}+4a_{13}a_{24}\cdot b_{13}b_{24}+4a_{14}a_{23}\cdot b_{14}b_{23}\geqslant\\&12\sqrt[3]{(a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34})}\cdot\sqrt[3]{(b_{12}b_{13}b_{14}b_{23}b_{24}b_{34})}\geqslant\\&12\sqrt[3]{72V^2}\cdot\sqrt[3]{72V'^2}=144\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 S_iS'_i&\geqslant 4\sqrt[4]{(S_1S_2S_3S_4)(S'_1S'_2S'_3S'_4)}\geqslant\\&4\sqrt[4]{\left(\frac{3^7}{4^3}\right)^{\frac23}V^{\frac83}\cdot\left(\frac{3^7}{4^3}\right)^{\frac23}V^{\frac83}}=9\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}\end{aligned}$$

于是 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\Big(\sum\limits_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-2b_{ij}^2\Big)\geqslant 144\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}+144\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}=288\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}$

利用高灵不等式：$\sum a_1(-b_1+b_2+b_3)\geqslant\sqrt{48\Delta_1\Delta_2}$ 采用式(12.1)的证明方法可得式(12.2)(证明从略).

用同样的方法还可以将不等式(12.1)，(12.2)加强为：

2. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的棱长分别为 $|A_iA_j|=a_{ij}$ 和 $|B_iB_j|=b_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，体积分别为 V 和 V'，则

(1) $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\Big(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-3b_{ij}^2\Big)\geqslant 216\sqrt[3]{3}\,(VV')^{\frac23}\tag{12.3}$$

(2) $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}\Big(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}-3b_{ij}\Big)\geqslant 36\sqrt[3]{9}\,(VV')^{\frac13}\tag{12.4}$$

不等式(12.1)，(12.2)，(12.3)和(12.4)可以看成是四面体中关于侧棱的 Neuberg-Pedoe 不等式.

3*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的棱长分别为 $|A_iA_j|=a_{ij}$ 和 $|B_iB_j|=b_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，体积分别为 V 和 V'，外接球半径分别为 R 和 R'，则

(1) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\left(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-2b_{ij}^2\right)\geqslant 96\cdot 3^{\frac{13}{16}}\cdot 2^{\frac{5}{8}}(RR')^{\frac{5}{16}}(VV')^{\frac{9}{16}}$ (12.5)

(2) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}\left(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}-2b_{ij}\right)\geqslant 48\sqrt[4]{3}(2RR')^{\frac{5}{32}}(3VV')^{\frac{9}{32}}$ (12.6)

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时等号成立.

式(12.5)的证明 由熟知的不等式 $V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}\cdot P^{\frac{2}{3}}$,知

$$(a_{12}^2+a_{34}^2)(b_{12}^2+b_{34}^2)+(a_{13}^2+a_{24}^2)(b_{13}^2+b_{24}^2)+(a_{14}^2+a_{23}^2)(b_{14}^2+b_{23}^2)\geqslant$$
$$12\sqrt[3]{(a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34})}\cdot\sqrt[3]{(b_{12}b_{13}b_{14}b_{23}b_{24}b_{34})}\geqslant$$
$$12\left(\frac{24}{\sqrt{3}}RV\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{24}{\sqrt{3}}R'V'\right)^{\frac{1}{2}}=96\sqrt{3}(RR)^{\frac{1}{2}}(VV')^{\frac{1}{2}}$$

又由不等式 $\left(\prod_{i=1}^{4}S_i\right)^2\geqslant\frac{3^{\frac{17}{2}}}{2^7}\cdot RV^5$,有

$$\sum_{i=1}^{4}S_iS'_i\geqslant 4\sqrt[4]{(S_1S_2S_3S_4)(S'_1S'_2S'_3S'_4)}\geqslant$$
$$4\sqrt[4]{\left(\frac{3^{\frac{17}{4}}}{2^{\frac{7}{2}}}\cdot R^{\frac{1}{2}}V^{\frac{5}{2}}\right)\left(\frac{3^{\frac{17}{4}}}{2^{\frac{7}{2}}}\cdot R^{\frac{1}{2}}V'^{\frac{5}{2}}\right)}=$$
$$9\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}(RR')^{\frac{1}{8}}(VV')^{\frac{5}{8}}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\left(\sum_{1\leqslant l<k\leqslant 4} b_{lk}^2-2b_{ij}^2\right)\geqslant 96\sqrt{3}(RV\cdot R'V')^{\frac{1}{2}}+$$
$$144\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{3}(RR')^{\frac{1}{8}}(VV')^{\frac{5}{8}}\geqslant$$
$$48\sqrt[8]{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2\cdot 3^{\frac{3}{8}}(RV\cdot R'V')^{\frac{1}{2}}\cdot 3\sqrt[4]{2}(RR')^{\frac{1}{8}}(VV')^{\frac{5}{8}}}=$$
$$96\cdot 3^{\frac{13}{16}}\cdot 2^{\frac{5}{8}}(RR')^{\frac{5}{16}}(VV')^{\frac{9}{16}}$$

由式(12.1)的证明过程可知,当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时(Ⅰ)=(Ⅱ),最后一步用均值不等式可以取到等号.

利用高灵不等式:$\sum a_1(-b_1+b_2+b_3)\geqslant\sqrt{48\Delta_1\Delta_2}$,采用式(12.3)的证明方法可得式(12.4)(略).

式(12.1)是一个很强的不等式,由它出发经过适当变形可得到许多有意义的不等式,例如:取四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$,$b_{ij}=a_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 可得:

4. $\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^4\geqslant 288\sqrt[3]{3}(V)^{\frac{4}{3}}$ (12.7)

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

式(12.7)可整理为:

5. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^4\geqslant 7\sqrt[3]{3}(V)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{4}\sum(a_{ij}^2-a_{lk}^2)^2$ (12.8)

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

6*. 设 m_i 是四面体$A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对侧面 $f_i\,(i=1,2,3,4)$ 上的中线,体积为 V,则

$$\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)^2 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} m_i^4 \geqslant \frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9} V^{\frac{4}{3}} \tag{12.9}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由式(1.28)得

$$\begin{aligned}\frac{9}{4}m_1^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 = \frac{9}{4}m_2^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{34}^2 = \\ \frac{9}{4}m_3^2 + a_{12}^2 + a_{14}^2 + a_{24}^2 = \\ \frac{9}{4}m_3^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2\end{aligned}$$

于是有

$$a_{23}^2 + a_{24}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2 = \frac{9}{4}m_2^2 - \frac{9}{4}m_1^2, a_{23}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{14}^2 = \frac{9}{4}m_3^2 - \frac{9}{4}m_1^2$$

$$a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 = \frac{9}{4}m_4^2 - \frac{9}{4}m_1^2, a_{13}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{24}^2 = \frac{9}{4}m_3^2 - \frac{9}{4}m_2^2$$

$$a_{14}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{23}^2 = \frac{9}{4}m_4^2 - \frac{9}{4}m_2^2, a_{14}^2 + a_{24}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 = \frac{9}{4}m_4^2 - \frac{9}{4}m_3^2$$

并注意到 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 = \frac{9}{4}\sum\limits_{i=1}^{4} m_i^2$,有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^4 = \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)^2 - \frac{1}{2}[(a_{23}^2 + a_{24}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2)^2 + \\ (a_{23}^2 + a_{24}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2)^2 + (a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2)^2 + \\ (a_{13}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{24}^2)^2 + (a_{14}^2 + a_{34}^2 - a_{12}^2 - a_{23}^2)^2 \cdot \\ (a_{14}^2 + a_{24}^2 - a_{12}^2 - a_{23}^2)^2] - \\ 4(a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2) = \\ \frac{81}{16}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)^2 - \frac{81}{32}\sum_{i=1}^{4}(m_i^2 - m_j^2)^2 - \\ 4(a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2) \geqslant \\ 288\sqrt[3]{3}\,(V)^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

由于 $72V^2 \leqslant \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}$,所以

$$\frac{81}{16}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)^2-\frac{81}{32}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(m_i^2-m_j^2)^2\geqslant 288\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}}+4(a_{12}^2a_{34}^2+a_{13}^2a_{24}^2+a_{14}^2a_{23}^2)\geqslant$$

$$288\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}}+12(a_{12}^2a_{34}^2a_{13}^2a_{24}^2a_{14}^2a_{23}^2)^{\frac{1}{3}}\geqslant$$

$$288\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}}+144\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}}=$$

$$432\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}}$$

整理得

$$\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)^2-\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} m_i^4\geqslant\frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9}V^{\frac{4}{3}}$$

证毕.

将式(12.9)可整理为:

7. 设 m_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 上的中线,体积为 V,则

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^4\geqslant\frac{2^6\sqrt[3]{3}}{3}V^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{8}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(m_i^2-m_j^2)^2 \qquad (12.10)$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

8. 设 m_i 和 m'^2_i 分别是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 的顶点 A_i 和 B_i 所对侧面 f_i 和 $f'_i(i=1,2,3,4)$ 上的中线,体积分别为 V_1 和 V_2,则

$$\sum_{i=1}^{4} m'^2_i\left(\sum_{k=1}^{4} m_k^2-\frac{4}{3}m_i^2\right)\geqslant\frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9}(V_1V_2)^{\frac{2}{3}} \qquad (12.11)$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时等号成立.

证明 由柯西不等式及式(12.9),得

$$\frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9}(V_1V_2)^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} m_i^2m'^2_i\leqslant\left(\frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9}V_1^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} m_i^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{2^9\sqrt[3]{3}}{9}V_2^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} m'^4_i\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2\sum_{i=1}^{4} m'^2_i$$

整理既得所证.

如果从式(12.3)出发,我们可以得到:

9*. $$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\right)^2-3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^4\geqslant 216\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}} \qquad (12.12)$$

10*. $$\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)^2-\frac{12}{7}\sum_{i=1}^{4} m_i^4\geqslant\frac{4^5\sqrt[3]{3}}{21}(V)^{\frac{4}{3}} \qquad (12.13)$$

11*. $$\sum_{i=1}^{4} m'^2_i\left(\sum_{k=1}^{4} m_k^2-\frac{12}{7}m_i^2\right)\geqslant\frac{4^5\sqrt[3]{3}}{21}(V_1V_2)^{\frac{2}{3}} \qquad (12.14)$$

证法同上,从略.

12^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的棱长分别为 a_{ij} 和 b_{ij}，外接球和内切球的半径分别为 R,r 和 R',r'，则

$$\frac{9}{4RR'}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}b_{ij}}\leqslant\frac{1}{4rr'}\tag{12.15}$$

证明 考虑不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}$ 和 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant 16R^2$，由柯西不等式，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}b_{ij}}\leqslant\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{b_{ij}^2}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4r^2}\,\frac{1}{4r'^2}}=\frac{1}{4rr'}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{a_{ij}b_{ij}}\geqslant\frac{36}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}b_{ij}}\geqslant\frac{36}{\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}b_{ij}^2}}\geqslant\frac{36}{\sqrt{16R^2 16R'^2}}=\frac{9}{4RR'}$$

证毕.

13. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的棱长分别为 a_{ij} 和 b_{ij}，外接球和内切球的半径分别为 R,r 和 R',r'，则

$$144rr'\leqslant 48\sqrt{3}\,(RR')^{\frac{1}{4}}\,(rr')^{\frac{3}{4}}\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}b_{ij}\leqslant 16RR'\tag{12.16}$$

证明 由柯西不等式，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}b_{ij}\leqslant\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}b_{ij}^2}\leqslant\sqrt{16R^2\cdot 16R'^2}=16RR'$$

由不等式 $V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}\cdot\left(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right)^{\frac{2}{3}}$ 及 $V\geqslant 8\sqrt{3}r^3$，得

$$\sqrt[6]{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}}\geqslant 2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}R^{\frac{1}{4}}r^{\frac{3}{4}}$$

于是，有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}b_{ij}&\geqslant 6\sqrt[6]{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}b_{ij}}\geqslant\\&6\cdot(2\sqrt{2}\sqrt[4]{3})R^{\frac{1}{4}}r^{\frac{3}{4}}\cdot(2\sqrt{2}\sqrt[4]{3})R'^{\frac{1}{4}}r'^{\frac{3}{4}}=\\&48\sqrt{3}\,(RR')^{\frac{1}{4}}\,(rr')^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

14. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1,V_2，侧面面积分别为 $S_i,F_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，则

$$\begin{aligned}&\frac{3^7}{4}V_1^2V_2^2(x_2x_3x_4S_1F_1+x_1x_3x_4S_2F_2+x_1x_2x_4S_3F_3+x_1x_2x_3S_4F_4)\leqslant\\&\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3\prod_{i=1}^4 S_i\prod_{i=1}^4 F_i\end{aligned}\tag{12.17}$$

证明 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 中，对 $x_i\in\mathbf{R}^*\,(1\leqslant i\leqslant 4)$，由柯西不等式及式(2.41)，得

$$\begin{aligned}&\frac{3^7}{4}V_1^2V_2^2(x_2x_3x_4S_1F_1+x_1x_3x_4S_2F_2+x_1x_2x_4S_3F_3+x_1x_2x_3S_4F_4)\leqslant\\&\left[\frac{3^7}{4}V_1^4(x_2x_3x_4S_1^2+x_1x_3x_4S_2^2+x_1x_2x_4S_3^2+x_1x_2x_3S_4^2)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\end{aligned}$$

$$\left[\frac{3^7}{4}V_1^4(x_2x_3x_4F_1^2+x_1x_3x_4F_2^2+x_1x_2x_4F_3^2+x_1x_2x_3F_4^2)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3\prod_{i=1}^4 S_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3\prod_{i=1}^4 F_i^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3\prod_{i=1}^4 S_i\prod_{i=1}^4 F_i$$

对式(12.17)作代换：$x_i\to x_iS_iF_i(x_i>0,i=1,2,3,4)$，则得：

15. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1,V_2，侧面面积分别为 $S_i,F_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，则

$$\frac{3^7}{4}V_1^2V_2^2(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)\leqslant\left(\sum_{i=1}^4 x_iS_iF_i\right)^3 \tag{12.18}$$

在式(12.18)中，令 $y_i=x_iS_iF_i(x_i>0,i=1,2,3,4)$，由四面体的体积公式(2.46)，得：

16. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1,V_2，顶点角分别为 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3,4)$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^4 y_i\right)^3\geqslant 3^3(y_1y_2y_3\sin\alpha_4\sin\beta_4+y_1y_2y_4\sin\alpha_3\sin\beta_3+ y_1y_3y_4\sin\alpha_2\sin\beta_2+y_2y_3y_4\sin\alpha_1\sin\beta_1) \tag{12.19}$$

下面我们给出四面体侧面积的 Neuberg—Pedoe 型不等式，首先给出三个引理：

$$\begin{aligned}\text{记 } E(x_1,x_2,x_3,x_4)=&\left(\frac{1}{x_1}-2\right)\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)+\\&\left(\frac{1}{x_1}-2\right)\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_4}-2\right)+\\&\left(\frac{1}{x_1}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)\left(\frac{1}{x_4}-2\right)+\\&\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)\left(\frac{1}{x_4}-2\right)\end{aligned} \tag{12.20}$$

引理 12.1 设 $0<x_i<1(i=1,2,3,4)$ 且 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$，则

$$E(x_1,x_2,x_3,x_4)\geqslant 32 \tag{12.21}$$

证明 采用逐步调整法. 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4>0$，若 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$，则等号成立，否则不妨设 $x_4<\frac{1}{4}<x_1$，令 $y_4=\frac{1}{4}$，$y_1=x_1+x_4-\frac{1}{4}$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3$，则 $x_1+x_4=y_1+y_4$，于是

$$\Delta E=E(x_1,x_2,x_3,x_4)-E(y_1,y_2,y_3,y_4)=$$

$$\left[\left(\frac{1}{x_1}-2\right)\left(\frac{1}{x_4}-2\right)-\left(\frac{1}{y_1}-2\right)\left(\frac{1}{y_4}-2\right)\right]\left[\left(\frac{1}{x_2}-2\right)+\left(\frac{1}{x_3}-2\right)\right]+$$

$$\left[\left(\frac{1}{x_1}-2\right)+\left(\frac{1}{x_4}-2\right)-\left(\frac{1}{y_1}-2\right)-\left(\frac{1}{y_4}-2\right)\right]\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)=$$

$$\left(\frac{1}{x_1x_4}-\frac{1}{y_1y_4}\right)\left\{[1-2(x_1+x_4)]\left(\frac{1}{x_2}-2+\frac{1}{x_3}-2\right)+\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)\right\}=$$

$$\frac{x_1+x_4}{x_1x_4y_1y_4}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-x_4\right)\left(\frac{1}{x_2}-2\right)\left(\frac{1}{x_3}-2\right)\left(\frac{1}{x_1+x_4}-2\right)\cdot P$$

其中 $P=\dfrac{x_1+x_4}{1-2(x_1+x_4)}+\dfrac{x_2}{1-2x_2}+\dfrac{x_3}{1-2x_3}$.

注意到 $\dfrac{1}{x_2}-2>0$, $\dfrac{1}{x_3}-2>0$. 所以：

当 $\dfrac{1}{x_1+x_4}-2>0$ 时，即 $x_1+x_4<\dfrac{1}{2}$，显然 $\Delta E>0$；

当 $\dfrac{1}{x_1+x_4}-2<0$ 时，即 $x_1+x_4>\dfrac{1}{2}$，令 $t=x_1+x_4$，这时

$$P\leqslant\frac{t}{1-2t}+\frac{x_2}{1-2x_2}+\frac{x_3}{1-2x_2}=\frac{t}{1-2t}+\frac{x_2+x_3}{1-2x_2}=$$

$$\frac{t}{1-2t}+\frac{1-t}{1-2x_2}=\frac{-1+2t-2t^2+2tx_2}{(2t-1)(1-2x_2)}\leqslant$$

$$\frac{-1+2t-2t^2+2t(1-t)}{(2t-1)(1-2x_2)}=-\frac{2t-1}{1-2x_2}<0$$

由此知 $\Delta E>0$；

当 $x_1+x_4=\dfrac{1}{2}$ 时，由推导过程可以看出 $\Delta E>0$.

这样最多经过 3 次调整有

$$E(x_1,x_2,x_3,x_4)\geqslant E\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=32$$

引理 12.2　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，令 $S=\sum_{i=1}^{4}S_i$，$\lambda_i=\dfrac{1}{S_i}(S-2S_i)$ $(i=1,2,3,4)$，则

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4\geqslant 32 \tag{12.22}$$

证明　在式(12.21)中，取 $x_i=\dfrac{S_i}{S}$ $(i=1,2,3,4)$，则 $\sum_{i=1}^{4}x_i=1$，即可得式(12.22).

引理 12.3　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)^2-2\sum_{i=1}^{4}S_i^2\geqslant 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}} \tag{12.23}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 记 $\lambda_i=\frac{1}{S_i}(S-2S_i)\ (i=1,2,3,4)$. 由式(2.56)和式(12.22)得

$$\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)^2-2\sum_{i=1}^{4}S_i^2=\sum_{i=1}^{4}\lambda_iS_i^2\geqslant\left(\frac{3^7}{4}\right)^{\frac{1}{3}}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+$$

$$\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{\frac{1}{3}}V^{\frac{4}{3}}\geqslant$$

$$\left(\frac{3^7}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 32^{\frac{1}{3}}V^{\frac{4}{3}}\geqslant 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}$$

17. Neuberg—Pedoe 型不等式(陈计):设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1,V_2,侧面面积分别为 $S_i,F_i(i=1,2,3,4)$,则

$$S_1(F_2+F_3+F_4-F_1)+S_2(F_1+F_3+F_4-F_2)+S_3(F_1+F_2+F_4-F_3)+$$
$$S_4(F_1+F_2+F_3-F_4)\geqslant 18\sqrt[3]{3}\ (V_1V_2)^{\frac{2}{3}}\quad(12.24)$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时取等号.

证明 由柯西不等式及式(12.23)得

$$18\sqrt[3]{3}\ (V_1V_2)^{\frac{2}{3}}+2\sum_{i=1}^{4}S_iF_i\leqslant\left[18\sqrt[3]{3}V_1^{\frac{4}{3}}+2\sum_{i=1}^{4}S_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[18\sqrt[3]{3}V_2^{\frac{4}{3}}+2\sum_{i=1}^{4}F_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{4}S_i\sum_{i=1}^{4}F_i$$

移项变形既得式(12.24).

18*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,侧面面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$\left(\sum S_1^2\right)^2-\frac{4}{3}\sum S_1^4\geqslant 54\sqrt[3]{9}V^{\frac{8}{3}}\qquad(12.25)$$

证明 由式(2.59)得

$$\prod S_1\geqslant\frac{3^{\frac{14}{3}}}{4^2}V^{\frac{8}{3}}$$

由式(3.18)得

$$3\left(\sum S_1^2\right)^2-4\sum S_1^4\geqslant 32\prod S_1$$

于是有

$$3\left(\sum S_1^2\right)^2-4\sum S_1^4\geqslant 162\sqrt[3]{9}V^{\frac{8}{3}}$$

19*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1,V_2,侧面面积分别为 $S_i,F_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum S_1^2\left(\sum F_i^2-\frac{4}{3}F_1^2\right)\geqslant 54\sqrt[3]{3}\ (V_1V_2)^{\frac{4}{3}}\qquad(12.26)$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时取等号.

证明 由柯西不等式及式(3.19)得

$$54\sqrt[3]{9}\ (V_1V_2)^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4}S_i^2F_i^2\leqslant\left[54\sqrt[3]{9}V_1^{\frac{8}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4}S_i^4\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left[54\sqrt[3]{9}V^{\frac{8}{3}}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4}F_i^4\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{4}S_i^2\sum_{i=1}^{4}F_i^2$$

变形既得所证.

20*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V_1, V_2，侧面面积分别为 $S_i, F_i (i=1,2,3,4)$，则

$$\sum S_1^2\left(\sum F_i^2-\frac{4}{3}F_1^2\right)\geqslant 18\sqrt{3}\sqrt[4]{\sum S_1^2}\sqrt[4]{\sum F_1^2}V_1V_2 \qquad (12.27)$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正四面体时取等号.

证明 由式(2.58)，有

$$\frac{3^7}{4^4}V^4(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)\leqslant\prod_{i=1}^{4}S_i^2$$

由式(3.18)，有

$$32\prod S_1\leqslant 3\left(\sum S_1^2\right)^2-4\sum S_1^4$$

由此得到

$$\left(\sum S_1^2\right)^2-\frac{4}{3}\sum S_1^4\geqslant 18\sqrt{3}\sqrt{\sum S_1^2}V^2$$

由柯西不等式，有

$$18\sqrt{3}\sqrt[4]{\sum S_1^2}\sqrt[4]{\sum F_1^2}V_1V_2+\frac{4}{3}\sum S_1^2F_1^2\leqslant$$

$$\left(18\sqrt{3}\sqrt{\sum S_1^2}V_1^2+\frac{4}{3}\sum S_1^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(18\sqrt{3}\sqrt{\sum F_1^2}V_2^2+\frac{4}{3}\sum F_1^4\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{4}S_i^2\sum_{i=1}^{4}F_i^2$$

变形既得所证. 证毕.

涉及棱切球半径的不等式

第十三章

13.1 概念及定理

和四面体六条棱都相切的球叫作该四面体的棱切球.并不是所有的四面体都存在棱切球.

定理 13.1(杨之) 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球的充分必要条件是:存在 $x_i,x_j\in\mathbf{R}^*$,使得

$$a_{ij}=x_i+x_j\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)\tag{13.1}$$

证明 必要性:若四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,不妨设棱切球与棱 A_iA_j 的切点为 $M_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,由球的切线长定理知

$$A_1M_{12}=A_1M_{13}=A_1M_{14}=x_1,A_2M_{12}=A_2M_{23}=A_2M_{24}=x_2$$

$$A_3M_{13}=A_3M_{23}=A_3M_{34}=x_3,A_4M_{14}=A_4M_{24}=A_4M_{34}=x_4$$

于是 $a_{ij}=x_i+x_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$.必要性得证.

充分性:由于长为 l,m,n 的三条线段能构成三角形的充要条件是存在三个数 b,c,d,使得 $l=b+c,m=b+d,n=c+d$,这样,长为 l,m,n 的三条线段可构成四面体 $ABCD$ 的一个面 $\triangle BCD$.

如果作 $\triangle BCD$ 的内切圆 O_1(图 13.1)与长为 n 的边 CD 切于点 E,那么 $CE=c,DE=d$.

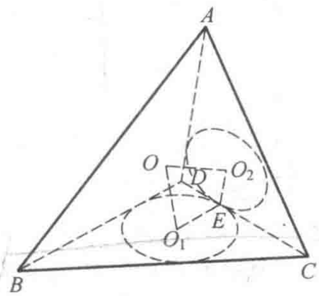


图 13.1

同理,如果作 $\triangle ACD$ 的内切圆 O_2,与 CD 的切点也是点 E,如图 13.1,且 $O_1E \perp CD$,$O_2E \perp CD$,因此 $CD \perp$ 平面 O_1EO_2. 如果过 O_1 和 O_2 分别作平面 BCD 和平面 ACD 的垂线,它们必同在平面 O_1EO_2 内,因此必相交,设交点为 O. 由于到三角形三边等距离的点的轨迹是过三角形内心且垂直于三角形所在平面的直线,所以点 O 到除 AB 以外的五条棱的距离相等. 通过作 $\triangle ABD$ 的内切圆,还可以求得除 AC 外的五条棱等距离的点 O',在注意到与三面角三条棱等距离的点的轨迹是由其顶点向其内部引的与三条棱成等角的射线(即三面角的平分线),知点 O 与 O' 同在三面角 $D\text{-}ABC$ 的平分线上,又同在过点 O_1 垂直于平面 BCD 的直线上,因此点 O 与 O' 重合. 这就证明了点 O 到六条棱的距离相等,根据球的切线性质,点 O 为球心,OE 为半径,即为四面体 $ABCD$ 的棱切球. 证毕.

定理 13.2　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球, 且 $a_{ij} = x_i + x_j (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,棱切球半径为 R^*,则

$$R^{*2} = -\frac{\det D_1}{2\det D_2} \tag{13.2}$$

其中 $\det D_1$,$\det D_2$ 分别为 4 阶和 5 阶行列式,即

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 \\ 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 & 2x_3x_4 \\ 2x_1x_4 & 2x_2x_4 & 2x_3x_4 & -2x_4^2 \end{vmatrix} = -2^8 (x_1x_2x_3x_4)^2$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 \\ 1 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 \\ 1 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 & 2x_3x_4 \\ 1 & 2x_1x_4 & 2x_2x_4 & 2x_3x_4 & -2x_4^2 \end{vmatrix}$$

证明　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱切球的球心为 A_5,棱切球与棱 A_iA_j 的切点为 M_{ij} $(M_{ij} = M_{ji})$,由球的切线长性质,若设 $|A_iM_{ij}| = x_i$,则 $a_{ij} = x_i + x_j$,又 $A_5M_{ij} \perp A_iA_j$,从而 $|A_5A_i|^2 = R^{*2} + x_i^2$. 由凯莱(Cayley) 定理,得

$D(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1+x_2)^2 & (x_1+x_3)^2 & (x_1+x_4)^2 & R^{*2}+x_1^2 \\ 1 & (x_2+x_1)^2 & 0 & (x_2+x_3)^2 & (x_2+x_4)^2 & R^{*2}+x_2^2 \\ 1 & (x_3+x_1)^2 & (x_3+x_2)^2 & 0 & (x_3+x_4)^2 & R^{*2}+x_3^2 \\ 1 & (x_4+x_1)^2 & (x_4+x_2)^2 & (x_4+x_3)^2 & 0 & R^{*2}+x_4^2 \\ 1 & R^{*2}+x_1^2 & R^{*2}+x_2^2 & R^{*2}+x_3^2 & R^{*2}+x_4^2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

经过简单的行或列变换,可得

$$D(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 & 0 \\ 1 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 & 0 \\ 1 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 & 2x_3x_4 & 0 \\ 1 & 2x_1x_4 & 2x_2x_4 & 2x_3x_4 & -2x_4^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R^{*2} \end{vmatrix}=0$$

将上述行列式按第 5 列展开得

$$D(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=\begin{vmatrix} 1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 \\ 1 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 \\ 1 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 & 2x_3x_4 \\ 1 & 2x_1x_4 & 2x_2x_4 & 2x_3x_4 & -2x_4^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}-$$

$$2R^{*2}\cdot\det D_2=0$$

再将上述等式中的第一个行列式按第 5 行展开,移项整理即得式(13.2).

定理 13.3　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,且 $a_{ij}=x_i+x_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,棱切球半径为 R^*,则

$$V^2R^{*2}=\frac{4}{9}(x_1x_2x_3x_4)^2 \tag{13.3}$$

证明　由式(1.18),得

$$V^2=\frac{1}{288}D(A_1,A_2,A_3,A_4)=$$

$$\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1+x_2)^2 & (x_1+x_3)^2 & (x_1+x_4)^2 \\ 1 & (x_2+x_1)^2 & 0 & (x_2+x_3)^2 & (x_2+x_4)^2 \\ 1 & (x_3+x_1)^2 & (x_3+x_2)^2 & 0 & (x_3+x_4)^2 \\ 1 & (x_4+x_1)^2 & (x_4+x_2)^2 & (x_4+x_3)^2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{288}\det D_2$$

由此及式(13.2)即可得到式(13.3).证毕.

定理 13.4
$$V^2=\frac{1}{9}[2(x_1^2x_2^2x_3x_4+x_1^2x_3^2x_2x_4+x_1^2x_4^2x_2x_3+x_2^2x_3^2x_1x_4+x_2^2x_4^2x_1x_3+x_3^2x_4^2x_1x_2)-(x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_4^2+x_1^2x_3^2x_4^2+x_2^2x_3^2x_4^2)] \tag{13.4}$$

证明 将 $a_{ij}=x_i+x_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 代入式(1.18),整理即可.

定理 13.5
$$36V^2\cdot R^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\cdot(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3) \tag{13.5}$$

证明 由式(1.17)得
$$36V^2\cdot R^2=p(p-b_1)(p-b_2)(p-b_3)$$
其中 $b_1=a_{23}\cdot a_{14},b_2=a_{13}\cdot a_{24},b_3=a_{12}\cdot a_{34},p=\frac{b_1+b_2+b_3}{2}$.由于
$$a_{ij}=x_i+x_j\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4)$$
计算可知
$$36V^2\cdot R^2=p(p-b_1)(p-b_2)(p-b_3)=(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\cdot(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$$

13.2 定理的应用

我们约定:符号 R^*,x_1,x_2,x_3,x_4 的意义同上节定理.

1. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,棱切球半径为 R^*,P 为四面体各棱长之积,则
$$VR^*\leqslant\frac{P^{\frac{2}{3}}}{24} \tag{13.6}$$
当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

事实上,由式(13.3)并应用平均值不等式及式(13.1),即得到式(13.6).

2*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,$a_{ij}=x_i+x_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则
$$V\cdot R\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1x_2x_3x_4 \tag{13.7}$$
当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由式(13.5)得
$$36V^2\cdot R^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\cdot$$

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$$

由平均值不等式得

$$(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\cdot$$
$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)\geqslant$$
$$6\sqrt[6]{(x_1x_2x_3x_4)^3}\cdot 2\sqrt{x_1x_2x_3x_4}\cdot 2\sqrt{x_1x_2x_3x_4}\cdot 2\sqrt{x_1x_2x_3x_4}=$$
$$48(x_1x_2x_3x_4)^2$$

所以
$$V^2\cdot R^2\geqslant\frac{4}{3}(x_1x_2x_3x_4)^2$$

由此既得式(13.7).证毕.

3.(林祖成,樊益武)设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,棱切球半径为 R^*,则

$$3r\leqslant\sqrt{3}R^*\leqslant R\tag{13.8}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 先证 $R\geqslant\sqrt{3}R^*$.

由式(13.7),(13.3),得

$$V^2\cdot R^2\geqslant\frac{4}{3}(x_1x_2x_3x_4)^2=3V^2R^{*2}$$

所以
$$R\geqslant\sqrt{3}R^*$$

再证$\sqrt{3}r\leqslant R^*$.

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱切球球心为 O,O 在侧面 f_i 上的射影为 P_i,易知 P_i 是其所在侧面的内心或旁心,记 $d'_i=|OP_i|\ (i=1,2,3,4)$,则

$$d'_i=\sqrt{R^{*2}-r'^2}\quad(i=1,2,3,4)$$

这里 r'_i 为侧面 f_i 的内切圆或旁切圆半径.

由于四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,故其棱长满足 $a_{ij}=x_i+x_j\ (1\leqslant i<j\leqslant 4)$.从而各侧面面积分别为

$$S_1=[x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}},S_2=[x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}}$$
$$S_3=[x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)]^{\frac{1}{2}},S_2=[x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]^{\frac{1}{2}}\tag{13.9}$$

故各个侧面内切圆半径分别为

$$r_1=\left(\frac{x_2x_3x_4}{x_2+x_3+x_4}\right)^{\frac{1}{2}},r_2=\left(\frac{x_1x_3x_4}{x_1+x_3+x_4}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$r_3=\left(\frac{x_1x_2x_4}{x_1+x_2+x_4}\right)^{\frac{1}{2}},r_4=\left(\frac{x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{13.10}$$

不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4$,则

$$x_1+x_2+x_3\leqslant x_1+x_2+x_4\leqslant x_1+x_3+x_4\leqslant x_2+x_3+x_4$$
$$x_1x_2x_3\leqslant x_1x_2x_4\leqslant x_1x_3x_4\leqslant x_2x_3x_4$$

所以

$$\begin{aligned}x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)\leqslant x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)\leqslant\\ x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)\leqslant\\ x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)\end{aligned}$$

又 $\dfrac{x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3}-\dfrac{x_1x_2x_4}{x_1+x_2+x_4}=\dfrac{x_1x_2(x_1+x_2)(x_3-x_4)}{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_4)}\leqslant 0$

即
$$\frac{x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3}\leqslant\frac{x_1x_2x_4}{x_1+x_2+x_4}$$

同理可证$\dfrac{x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3}\leqslant\dfrac{x_1x_2x_4}{x_1+x_2+x_4}\leqslant\dfrac{x_1x_3x_4}{x_1+x_3+x_4}\leqslant\dfrac{x_2x_3x_4}{x_2+x_3+x_4}$

于是有 $S_4\leqslant S_3\leqslant S_2\leqslant S_1;r_4^2\leqslant r_3^2\leqslant r_2^2\leqslant r_1^2$

所以 $\sqrt{R^{*2}-r_4^2}\geqslant\sqrt{R^{*2}-r_3^2}\geqslant\sqrt{R^{*2}-r_2^2}\geqslant\sqrt{R^{*2}-r_1^2}$

记 $d_i=\sqrt{R^{*2}-r_i^2}\quad(i=1,2,3,4)$

显然有 $d'_i=\sqrt{R^{*2}-r_i'^2}\leqslant\sqrt{R^{*2}-r_i^2}=d_i\quad(i=1,2,3,4)$

由四面体体积公式及切比雪夫不等式，有

$$r\sum_{i=1}^4 S_i=\sum_{i=1}^4 d'_iS_i\leqslant\sum_{i=1}^4 d_iS_i\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 d_i\sum_{i=1}^4 S_i$$

注意到$\sum\limits_{i=1}^4 r_i^2\geqslant 8r^2$，则

$$r\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 d_i\leqslant\frac{1}{4}\left(4\sum_{i=1}^4 d_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(4R^{*2}-\sum_{i=1}^4 r_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(4R^{*2}-8r^2)^{\frac{1}{2}}$$

整理可得 $3r^2\leqslant R^{*2}$，即$\sqrt{3}r\leqslant R^*$.

从以上的证明可知当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立. 证毕.

注 右边不等式为林祖成于1995年证明，左边不等式为樊益武于2001年证明.

4^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，则

$$8r^2R^*\leqslant V\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}rR^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}rR^{*2}\tag{13.11}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 先证 $V\geqslant 8r^2R^*$.

由于 $S_1=[x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}}$，$S_2=[x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}}$

$S_3=[x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)]^{\frac{1}{2}}$，$S_4=[x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]^{\frac{1}{2}}$

应用四面体的体积公式和平均值不等式

$$V=\frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4)\geqslant\frac{4}{3}r\sqrt{3}\ (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}}$$

即

$$V^2\geqslant 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 r^2x_1x_2x_3x_4 \tag{13.12}$$

由式(13.12),(13.3)知

$$V^2\geqslant 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 r^2\cdot\left(\frac{3}{2}VR^*\right)=8r^2R^*V$$

因此

$$V\geqslant 8r^2R^*$$

再证 $V\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}rR^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}rR^{*2}$.

由式(3.9),(13.30),有

$$S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{36}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right)^2\leqslant 2\sqrt{3}(R^2+R^{*2})$$

于是

$$V\leqslant\frac{1}{3}rS\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}r(R^2+R^{*2})$$

从以上的证明可知当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立. 证毕.

5^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,棱切球半径为 R^*,侧面 f_i 的内切圆半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}\geqslant\frac{6}{R^{*2}} \tag{13.13}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由定理 13.1,当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球时,即存在 $x_i\in\mathbf{R}^*(i=1,2,3,4)$,使 $a_{ij}=x_i+x_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$. 由式(13.4)得

$$V^2=\frac{1}{9}\left[2\sum x_1^2x_2^2x_3x_4-\sum x_1^2x_2^2x_3^2\right]$$

易证

$$\sum x_1^2x_2^2x_3^2\geqslant\frac{2}{3}\sum x_1^2x_2^2x_3x_4 \tag{13.14}$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时等号成立.

由式(13.14),有

$$V^2\leqslant\frac{4}{27}(x_1x_2x_3x_4)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j \tag{13.15}$$

又由式(13.3),有

$$\frac{4}{9}(x_1x_2x_3x_4)^2\leqslant R^{*2}\cdot\frac{4}{27}(x_1x_2x_3x_4)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j$$

所以

$$R^{*2}\geqslant\frac{3x_1x_2x_3x_4}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}$$

于是
$$\frac{3}{R^{*2}} \leqslant \frac{\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} x_i x_j}{x_1 x_2 x_3 x_4} \tag{13.16}$$

由式(13.10),有
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} = \frac{2\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} x_i x_j}{x_1 x_2 x_3 x_4} \tag{13.17}$$

将式(13.16)代入式(13.17)即可得式(13.13). 从以上的证明可知等号成立当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体. 证毕.

注意到式(10.18):$\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} \leqslant \frac{2}{r^2}$,有 $\frac{6}{R^{*2}} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} \leqslant \frac{2}{r^2}$. 于是有 $\sqrt{3}\, r \leqslant R^*$. 这即是式(13.8)左端不等式.

不等式(13.13)还可以加强为:

6*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,棱切球半径为 R^*,内切球半径为 r,侧面 f_i 的内切圆半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$,则
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{rR^*} \tag{13.18}$$
当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由式(13.9)有
$$S_1 = [x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}}, S_2 = [x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)]^{\frac{1}{2}}$$
$$S_3 = [x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)]^{\frac{1}{2}}, S_4 = [x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]^{\frac{1}{2}}$$

因为
$$(x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2)^2 - 3x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4) =$$
$$x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_4^2x_2^2-(x_2^2x_3x_4+x_2x_3^2x_4+x_2x_3x_4^2) \geqslant 0$$

所以
$$\sqrt{3}\, S_1 \leqslant x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2$$

同理 $\sqrt{3}\, S_2 \leqslant x_1x_3+x_3x_4+x_4x_1, \sqrt{3}\, S_3 \leqslant x_1x_2+x_1x_4+x_4x_2$

所以
$$\sqrt{3}\, S_4 \leqslant x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

于是
$$\sqrt{3}\, S = \sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4) \leqslant$$
$$2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2)$$

由式(13.17)有
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2} = \frac{2\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} x_i x_j}{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

由式(13.3)及 $V=\frac{1}{3}rS$,得 $\frac{1}{rR^*} = \frac{S}{2x_1x_2x_3x_4} \leqslant \frac{\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} x_i x_j}{\sqrt{3}\, x_1x_2x_3x_4} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i^2}$. 证毕.

7^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，则

$$\left(\prod_{i=1}^{4} S_i\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{9}{2}R^* V \tag{13.19}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 由式(13.9)利用均值不等式，得

$$\prod_{i=1}^{4} S_i \geqslant 9\,(x_1x_2x_3x_4)^2 \tag{13.20}$$

由式(13.3)及(13.20)可得式(13.19). 从以上的证明可知等号成立当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时. 证毕.

8^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，则

$$\frac{1}{R^2R^{*2}} \leqslant \sum \frac{1}{S_1^2} \tag{13.21}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时等号成立.

证明 易证 $$\sum \frac{x_1}{x_2+x_3+x_4} \geqslant \frac{4}{3} \tag{13.22}$$

由式(13.9)，(13.21)，得

$$\sum \frac{1}{S_1^2} = \sum \frac{1}{x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)} =$$
$$\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\sum \frac{x_1}{x_2+x_3+x_4} \geqslant \frac{4}{3x_1x_2x_3x_4} \tag{13.23}$$

由式(13.3)，(13.11)及(13.23)，得

$$\sum \frac{1}{S_1^2} \geqslant \frac{8}{9VR^*} \geqslant \frac{1}{R^2R^{*2}}$$

从以上的证明可知等号成立当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时. 证毕.

9^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，且 $a_{ij}=x_i+x_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$rV \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9}x_1x_2x_3x_4 \tag{13.24}$$

证明 由式(13.3)，(13.8)可知式(13.24)成立.

10^*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，且 $a_{ij}=x_i+x_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$r \leqslant \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \tag{13.25}$$

证明 由式(13.17)，有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2} = \frac{2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j}{x_1x_2x_3x_4}$$

其中 r_i 为侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的内切圆半径(下同). 又由不等式

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$$

得
$$\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}{x_1x_2x_3x_4}\leqslant\frac{1}{r^2}\tag{13.26}$$

由式(13.26)及均值不等式得

$$r^2\leqslant\frac{x_1x_2x_3x_4}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}\leqslant\frac{x_1x_2x_3x_4}{6\sqrt[6]{(x_1x_2x_3x_4)^3}}=\frac{1}{6}\sqrt{x_1x_2x_3x_4}$$

由此即可得式(13.25). 证毕.

11*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,侧面 f_i 的面积为 S_i,内切圆半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$,四面体的内切球半径为 r,则

$$\sum\frac{1}{S_1^2}\leqslant\frac{1}{108}\left(\sum\frac{1}{r_1^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{27r^4}\tag{13.27}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

先证明一个引理.

引理 13.1　设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,3,4)$,则

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)^2\geqslant 9\,(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}\sum x_1^{\frac{4}{3}}\tag{13.28}$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时取等号.

证明　用拉格朗日(Lagrange)乘子法. 由于式(13.27)关于 x_1,x_2,x_3,x_4 是齐次对称的,不妨设 $\sum x_1=1(x_i\geqslant 0,i=1,2,3,4)$. 设

$$f=\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)^2-9\,(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}\sum x_1^{\frac{4}{3}}$$

令 $F=f+\lambda\left(\sum x_1-1\right)$,则

$$F'_{x_i}=2(1-x_i)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j-\frac{6\,(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}}{x_i}\sum x_1^{\frac{4}{3}}-$$
$$12\,(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}\cdot x_i^{\frac{1}{3}}+\lambda=0\quad(i=1,2,3,4)$$

$$F'_{x_1}-F'_{x_2}=2(x_2-x_1)\left\{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j+3\,(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}\cdot\right.$$
$$\left.\left[\frac{(x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}})\sum x_1^{\frac{4}{3}}-2x_1x_2}{x_1x_2(x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}})}\right]\right\}=0$$

由于　$(x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}})\sum x_1^{\frac{4}{3}}>(x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}})(x_1^{\frac{4}{3}}+x_2^{\frac{4}{3}})\geqslant$

$$3x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}\cdot 2x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}=6x_1x_2$$

所以
$$x_1=x_2$$

同理可证 $x_1=x_2=x_3=x_4$. 于是可得唯一驻点 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$，且 $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=0$. 显然在边界上总有 $f\geqslant 0$. 综上有 $f_{\min}=0$.

下面证明式(13.27). 由式(13.22)可知

$$\sum\frac{1}{S_1^2}=\sum\frac{1}{x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)}=\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\sum\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}$$

由式(13.25)得
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}=\frac{2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}{x_1x_2x_3x_4}$$

要证式(13.27)，只要证明

$$\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\sum\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}\leqslant\frac{1}{27}\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}{x_1x_2x_3x_4}\right)^2$$

只要证明

$$27x_1x_2x_3x_4\sum\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)^2$$

由均值不等式，只要证明

$$27x_1x_2x_3x_4\sum\frac{x_1}{3\sqrt[3]{x_2x_3x_4}}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)^2$$

只要证明

$$9(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{2}{3}}\sum x_1^{\frac{4}{3}}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)^2$$

此即为式(13.28). 又由 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$ 可得后边不等式. 证毕.

由式(13.21)和(13.27)得：

12. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，四面体的外接球半径和内切球半径分别为 R,r，四面体的侧面积为 $S_i\ (i=1,2,3,4)$，则

$$\frac{1}{R^2R^{*2}}\leqslant\sum\frac{1}{S_1^2}\leqslant\frac{1}{27r^4}\tag{13.29}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

13*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，$a_{ij}=|A_iA_j|\ (1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right)^2\leqslant 72(R^2+R^{*2})\tag{13.30}$$

当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 由式(13.1)，(13.3)，(13.4)，(13.5)得(用 Maple 软件展开)

$$72(R^2+R^{*2})-\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right)^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{32}{9}\left(\prod x_1\right)^2+\frac{2}{9}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)\cdot\prod_{sym}(x_1x_2+x_3x_4)-$$
$$\frac{1}{9}\left(2\sum_{sym}x_1^2x_2^2x_3x_4-\sum_{sym}x_1^2x_2^2x_3^2\right)\cdot\left(\sum x_1\right)^2=$$
$$\frac{1}{9}\sum_{sym}x_1^4x_2^2x_3^2+\frac{4}{9}\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3+\frac{4}{3}(x_1x_2x_3x_4)^2-$$
$$\frac{4}{9}\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4-\frac{4}{9}\sum_{sym}x_1^3x_2^3x_3x_4\geqslant 0$$

由不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,得

$$\frac{1}{9}\left(\sum_{sym}x_1^4x_2^2x_3^2+12x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\right)=\frac{1}{9}\sum_{sym}(x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2)\geqslant$$
$$\frac{2}{9}\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4 \tag{13.31}$$

由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,得

$$\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3=\sum_{sym}x_2^3x_3^3(x_1^2+x_4^2)\geqslant 2\sum_{sym}x_2^3x_3^3x_1x_4 \tag{13.32}$$

由不等式 $a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$,得

$$\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3=\sum_{sym}x_1^2x_2^3(x_3^3+x_4^3)\geqslant\sum_{sym}x_1^2x_2^3(x_3^2x_4+x_4^2x_3)=\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4 \tag{13.33}$$

由式(13.31),(13.32),(13.33)得

$$\frac{1}{9}\sum_{sym}x_1^4x_2^2x_3^2+\frac{4}{3}(x_1x_2x_3x_4)^2+\frac{4}{9}\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3=$$
$$\frac{1}{9}\left[\sum_{sym}x_1^4x_2^2x_3^2+12(x_1x_2x_3x_4)^2\right]+\frac{2}{9}\left(\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3+\sum_{sym}x_1^2x_2^3x_3^3\right)\geqslant$$
$$\frac{2}{9}\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4+\frac{2}{9}\left(\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4+2\sum_{sym}x_2^3x_3^3x_1x_4\right)=$$
$$\frac{4}{9}\sum_{sym}x_1^3x_2^2x_3^2x_4+\frac{4}{9}\sum_{sym}x_2^3x_3^3x_1x_4$$

于是有
$$8V^2R^2+8V^2R^{*2}-V^2\left(\sum x_1\right)^2\geqslant 0$$

由此可得式(13.30).证毕.

14*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球,棱切球半径为 R^*,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant\frac{72}{5}R^2+\frac{24}{5}R^{*2} \tag{13.34}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 由式(13.1),(13.3),(13.4),(13.5)得(用 Maple 软件展开)

$$\frac{24}{5}V^2R^{*2}+\frac{72}{5}V^2R^2-V^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2=$$

$$\frac{32}{15}\left(\prod x_1\right)^2+\frac{2}{5}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_i x_j\right)\cdot \prod_{sym}(x_1x_2+x_3x_4)-$$
$$\frac{1}{9}\left(2\sum_{sym} x_1^2x_2^2x_3x_4-\sum_{sym} x_1^2x_2^2x_3^2\right)\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i+x_j)^2=$$
$$\frac{1}{3}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2+\frac{28}{45}\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3+\frac{4}{5}(x_1x_2x_3x_4)^2-$$
$$\frac{4}{15}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3x_4-\frac{8}{15}\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4-\frac{4}{9}\sum_{sym} x_1^3x_2^3x_3x_4$$

由不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，得

$$\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2+12x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2=\sum_{sym}(x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2)\geqslant 2\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4 \tag{13.35}$$

由不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，得

$$\begin{aligned}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2 &= \sum_{sym} x_1^4(x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_4^2x_2^2)\geqslant \\ &\sum_{sym} x_1^4(x_2x_3^2x_4+x_3x_4^2x_2+x_4x_2^2x_3)= \\ &\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3x_4\end{aligned} \tag{13.36}$$

由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，得

$$\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3=\sum_{sym} x_2^3x_3^3(x_1^2+x_4^2)\geqslant 2\sum_{sym} x_2^3x_3^3x_1x_4 \tag{13.37}$$

由不等式 $a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$，得

$$\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3=\sum_{sym} x_1^2x_2^3(x_3^3+x_4^3)\geqslant\sum_{sym} x_1^2x_2^3(x_3^2x_4+x_4^2x_3)=\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4 \tag{13.38}$$

由式(13.35)，(13.36)，(13.37)，(13.38)得

$$\frac{1}{3}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2+\frac{28}{45}\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3+\frac{4}{5}(x_1x_2x_3x_4)^2=$$
$$\frac{4}{15}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2+\frac{1}{15}\left[\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3^2+12(x_1x_2x_3x_4)^2\right]+$$
$$\frac{6}{15}\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3+\frac{2}{9}\sum_{sym} x_1^2x_2^3x_3^3\geqslant$$
$$\frac{4}{15}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3x_4+\frac{2}{15}\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4+$$
$$\frac{6}{15}\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4+\frac{2}{9}\times 2\sum_{sym} x_2^3x_3^3x_1x_4=$$
$$\frac{4}{15}\sum_{sym} x_1^4x_2^2x_3x_4+\frac{8}{15}\sum_{sym} x_1^3x_2^2x_3^2x_4+\frac{4}{9}\sum_{sym} x_2^3x_3^3x_1x_4$$

于是有

$$\frac{72}{5}V^2R^2+\frac{24}{5}V^2R^{*2}-V^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2\geqslant 0$$

由此可得式(13.34).证毕.

猜想

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant 14R^2 + 6R^{*2}$$

关于特殊四面体的不等式

第十四章

14.1 直角四面体

14.1.1 概念与性质

在四面体 $PABC$ 中，若 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$，这样的四面体叫作直角四面体. 设侧面 $\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$，$\triangle ABC$ 的面积分别为 S_A，S_B，S_C，S_P，外接圆的半径和内切圆的半径分别为 R_A，R_B，R_C，R_P；r_A，r_B，r_C，r_P. $\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 和底面 $\triangle ABC$ 所成二面角的度数分别为 α，β，γ，$PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，底面 $\triangle ABC$ 上的高为 h，四面体 $PABC$ 的外接球半径和内切球半径分别为 R，r.

性质 14.1. $$S_A^2+S_B^2+S_C^2=S_P^2 \tag{14.1}$$

性质 14.2. $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{14.2}$$

性质 14.3. $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2} \tag{14.3}$$

14.1.2 应用

1. $$\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta+\gamma<\pi \tag{14.4}$$

证明 易知 α,β,γ 均为锐角，由式(14.2)，有

$$\cos^2\alpha=\sin^2\beta-\cos^2\gamma=(\sin\beta-\cos\gamma)(\sin\beta+\cos\gamma)>0$$

所以 $\sin\beta>\cos\gamma=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

所以 $\beta>\frac{\pi}{2}-\gamma$，即 $\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$

同理 $\gamma+\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$

以上三式相加，整理得

$$\alpha+\beta+\gamma>\frac{3\pi}{4}$$

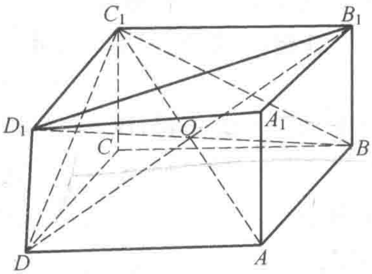


图 14.1

另外，设 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha'$，$\beta=\frac{\pi}{2}-\beta'$，$\gamma=\frac{\pi}{2}-\gamma'$，则 α',β',γ' 均为锐角，且 $\sin^2\alpha'+\sin^2\beta'+\sin^2\gamma'=1$. 构造长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，使得 $DA=\sin\alpha'$，$AB=\sin\beta'$，$BB_1=\sin\gamma'$，如图 14.1 所示，则 $\angle DC_1A=\alpha'$，$\angle AC_1B=\beta'$，$\angle BD_1B_1=\gamma'$. 设 AC_1 与 BD_1 交于点 O，则知 $\angle DOA=2\alpha'$，$\angle AOB=2\beta'$，$\angle BOB_1=2\gamma'$. 由于三面角的任意两个面角的和大于第三个面角，则

$$2\alpha'+2\beta'=\angle AOD+\angle AOB>\angle BOD=\pi-2\gamma'$$

所以
$$\alpha'+\beta'+\gamma'>\frac{\pi}{2}$$

于是
$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}-(\alpha'+\beta'+\gamma')<\pi$$

证毕.

2*.
$$3(\sqrt{3}+1)r\leqslant 2R \tag{14.5}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 由式(14.1)、幂平均值不等式、算术－几何平均值不等式及公式 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，有

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{\frac{1}{2}abc}{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+\sqrt{\left(\frac{1}{2}ab\right)^2+\left(\frac{1}{2}bc\right)^2+\left(\frac{1}{2}ca\right)^2}}\leqslant$$

$$\frac{\sqrt{3}\,abc}{(\sqrt{3}+1)(ab+bc+ca)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{a^2b^2c^2}\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}}{(\sqrt{3}+1)(ab+bc+ca)}\leqslant$$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\cdot\frac{ab+bc+ca}{3}}{(\sqrt{3}+1)(ab+bc+ca)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3(\sqrt{3}+1)}=\frac{2R}{3(\sqrt{3}+1)}$$

3*. $$R \leqslant \frac{3}{2} R_P \tag{14.6}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 在 $\triangle ABC$ 中,由 Neuberg 不等式,有

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leqslant 9R_p^2$$

由于 $AB^2 = a^2 + b^2, BC^2 = b^2 + c^2, CA^2 = c^2 + a^2$,所以

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 9R_P^2$$

又由于 $$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

所以 $$4R^2 \leqslant 9R_P^2$$

即 $$R \leqslant \frac{3}{2} R_P$$

4*. $$\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} \leqslant \frac{2(2\sqrt{2}+3)}{h^2} \tag{14.7}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 由于 $r_C = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \dfrac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \geqslant$

$$\frac{ab}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{a^2+b^2}}$$

所以 $$\frac{1}{r_C^2} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

同理 $$\frac{1}{r_B^2} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right), \frac{1}{r_A^2} \leqslant (2\sqrt{2}+3)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

以上三式相加,再利用性质 14.3,得

$$\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} \leqslant \frac{2(2\sqrt{2}+3)}{h^2}$$

5*. $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{3-\sqrt{3}}{2r} \tag{14.8}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 运用性质 14.1 及幂平均不等式,有

$$r = \frac{3V}{S} = \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}} \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{3}\,abc}{(1+\sqrt{3})(ab+bc+ca)}$$

整理可得 $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{3-\sqrt{3}}{2r}$$

6*. $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2r^2} \tag{14.9}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 运用性质 14.1 及幂平均不等式,有

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}\geqslant$$

$$\frac{abc}{(1+\sqrt{3})\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}$$

整理可得 $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2r^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2r^2}$$

7*. $$r_Ph\leqslant\frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{6} \tag{14.10}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 $$r_P=\frac{2S_P}{|AB|+|BC|+|CA|}=$$

$$\frac{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}$$

$$h=\frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}$$

由算术－几何平均值不等式,有

$$r_Ph=\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant$$

$$\frac{abc}{2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}}\leqslant\frac{abc}{6\sqrt[3]{abc}}=\frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{6}$$

证毕.

8*. $$h\leqslant\sqrt{2}\,r_P \tag{14.11}$$

证明 由公式 $r_P=\dfrac{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}$

$$h=\frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}$$

原不等式等价于

$$abc\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)\leqslant\sqrt{2}\left[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}}+\sqrt{\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}}+\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}}\leqslant\sqrt{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

令 $x=\dfrac{1}{a^2},y=\dfrac{1}{b^2},z=\dfrac{1}{c^2}$,且不妨设 $x+y+z=1$,则原不等式等价于

$$\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}\leqslant\sqrt{2}$$

由算术一几何平均值不等式

$$\sqrt{x(y+z)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x(y+z)} \leqslant \frac{2x+y+z}{2\sqrt{2}} = \frac{1+x}{2\sqrt{2}}$$

同理$\sqrt{y(z+x)} \leqslant \frac{1+y}{2\sqrt{2}}$,$\sqrt{z(x+y)} \leqslant \frac{1+z}{2\sqrt{2}}$.

所以$\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)} \leqslant \frac{1+x}{2\sqrt{2}}+\frac{1+y}{2\sqrt{2}}+\frac{1+z}{2\sqrt{2}}=$ $\sqrt{2}$.证毕.

9*.

$$h \leqslant (\sqrt{3}+1)r \tag{14.12}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明

$$r=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}} \geqslant \frac{abc}{(1+\sqrt{3})\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}=\frac{h}{1+\sqrt{3}}$$

证毕.

10.(刘才华)

$$a+b+c+h \geqslant (10+4\sqrt{3})r \tag{14.13}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 易知

$$h=a\cos\alpha=b\cos\beta=c\cos\gamma \tag{14.14}$$

由式(1.11)有

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h} \tag{14.15}$$

由式(14.14),(14.15)得

$$h=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)r \tag{14.16}$$

于是

$$a+b+c+h=\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}+1\right)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)r=$$
$$\Big[(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right)+$$
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}+1\Big]r$$

由式(14.2)知 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.所以

$$0<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \sqrt{3}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=\sqrt{3}$$

于是有

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma} \geqslant$$
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\frac{9}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma} \geqslant$$

$$\sqrt{3}+\frac{9}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

易知

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right)\geqslant 9$$

故 $a+b+c+h\geqslant(9+4\sqrt{3}+1)r=(10+4\sqrt{3})r$. 证毕.

11.(刘才华) $$abch\geqslant(144+84\sqrt{3})r^4 \tag{14.17}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

证明 由于 $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant 3\sqrt[3]{(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^2}>0$

所以 $$0<\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

因此 $$\frac{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)^4}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\geqslant\frac{(3\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}+1)^4}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$[3(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^{\frac{1}{12}}+(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^{-\frac{1}{4}}]^4\geqslant$$

$$\left[3(3\sqrt{3})^{\frac{1}{12}}+(3\sqrt{3})^{-\frac{1}{4}}\right]^4=144+84\sqrt{3} \tag{14.18}$$

由式(14.14),(14.16)及(14.18)知

$$abch=\frac{h^4}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)^4}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}r^4\geqslant(144+84\sqrt{3})r^4$$

证毕.

12*. $$S_P<S_A+S_B+S_C\leqslant\sqrt{3}S_P \tag{14.19}$$

证明 以下仅证明右边不等式.运用式(14.1)及幂平均不等式,有

$$(S_A+S_B+S_C)^2\leqslant 3(S_A^2+S_B^2+S_C^2)=3S_P^2$$

开方即可得要证不等式.证毕.

13*.设 x,y,z 都是正数,则

$$(xS_A+yS_B+zS_C)^2\leqslant S_P^2(x^2+y^2+z^2) \tag{14.20}$$

证明 $S_P^2(x^2+y^2+z^2)-(xS_A+yS_B+zS_C)^2=$

$(S_P^2-S_A^2)x^2+(S_P^2-S_B^2)y^2+(S_P^2-S_B^2)z^2-$

$2S_AS_Bxy-2S_BS_Cyz-2S_AS_Cxz=$

$(S_B^2+S_C^2)x^2+(S_A^2+S_C^2)y^2+(S_A^2+S_B^2)z^2-$

$2S_AS_Bxy-2S_BS_Cyz-2S_AS_Cxz=$

$(xS_B-yS_A)^2+(xS_C-zS_A)^2+(yS_C-zS_B)^2\geqslant 0$

猜想 1. (1) $r_A^2+r_B^2+r_C^2\leqslant 9(3-2\sqrt{2})r_P^2$.

(2) $\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}\geqslant\frac{2\sqrt{3}+3}{3r_P^2}$.

(3) $r \leqslant \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} r_P$.

以上猜想当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

14.2 等面四面体

14.2.1 概念与性质

我们称三组对棱分别相等的四面体为等面四面体.

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是等面四面体，以侧面 f_i 和 f_j 为面的二面角记为 $\theta_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$.

由几何性质易知：

性质 14.4 等面四面体$\Leftrightarrow a_{12}=a_{34}, a_{13}=a_{24}, a_{14}=a_{23}$

$$\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3=S_4$$

$$\Leftrightarrow \theta_{12}=\theta_{34}, \theta_{13}=\theta_{24}, \theta_{14}=\theta_{23}$$

14.2.2 应用

1*. 设等面四面体 $ABCD$ 的外接球半径和内接球半径分别为 R, r，侧面 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径分别为 R', r'，则

$$3r \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2} r' \leqslant R \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4} R' \tag{14.21}$$

当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时取等号.

证明 设 $BC=AD=a, AC=BD=b, AB=CD=c$. AB, AC；AC, AD；AD，AB 的夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$，则 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$，由三角形中的恒等式，有

$$1-\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3=2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$$

由式(1.20)得
$$V=\frac{1}{6}abcT$$

其中 $T^2=1-\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=4\cos\theta_1\cos\theta_2 \cdot \cos\theta_3$. 于是

$$V=\frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3} \tag{14.22}$$

又由式(1.17)，(14.22)，得

$$R=\frac{1}{24V}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\frac{1}{24V}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)2bc\cos\theta_1 \cdot 2ca\cos\theta_2 \cdot 2ab\cos\theta_3}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \tag{14.23}$$

由式(14.23)及三角形中的不等式 $36r'^2 \leqslant a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R'^2$ 得

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}r' \leqslant R \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}R'$$

又由式(10.18),有

$$\frac{4}{r'^2} \leqslant \frac{2}{r^2}$$

所以 $$\sqrt{2}\,r \leqslant r'$$

至此式(14.21)得证. 证毕.

2. 设等面四面体的侧面 ABC,ACD,ADB 与底面 BCD 的所夹的二面角分别为 α,β,γ,则

$$\sum \cos^2\alpha \geqslant \frac{1}{3} \tag{14.24}$$

证明 由四面体中的射影定理易得

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$$

于是 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geqslant \frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=\frac{1}{3}$. 证毕.

运用 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 等,有:

3. 设等面四面体的侧面 ABC,ACD,ADB 与底面 BCD 所夹的二面角分别为 α,β,γ,则

$$\sum \sin^2\alpha \leqslant \frac{8}{3} \tag{14.25}$$

由此易得:

4. 设等面四面体的侧面 ABC,ACD,ADB 与底面 BCD 所夹的二面角分别为 α,β,γ,则

$$\sum \sin\alpha \leqslant 2\sqrt{2} \tag{14.26}$$

5. 设等面四面体的侧面 ABC,ACD,ADB 与底面 BCD 所夹的二面角分别为 α,β,γ,则

$$\sum \sin\alpha\sin\beta \leqslant \frac{8}{3} \tag{14.27}$$

设等面四面体 $ABCD$ 的高为 h,侧面 ABC 三边上的高分别为 h_1,h_2,h_3,易知 $\sin\alpha=\frac{h}{h_1}$ 等,于是由式(14.24),(14.23)得:

6*. $$\sum \frac{1}{h_1} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{h} \tag{14.28}$$

7*. $$\sum \frac{1}{h_1^2} \leqslant \frac{8}{3h^2} \tag{14.29}$$

8*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是等面四面体，P 是四面体内任一点，点 P 到各侧面 f_i 的距离为 r_i，到各棱 A_iA_j 的距离为 $h_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则

$$(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 \leqslant \frac{4}{9}[(h_{12} + h_{34})^2 + (h_{13} + h_{24})^2 + (h_{14} + h_{23})^2] \tag{14.30}$$

当且仅当点 P 为四面体内心时等号成立.

证明 如图 14.2 所示，过点 P 作 $PE \perp f_1$ 于点 E，作 $PF \perp f_2$ 于点 F，作 $PQ \perp A_3A_4$ 于点 Q，于是

$$r_1 = h_{34}\sin\angle PQE, r_2 = h_{34}\sin\angle PQF$$

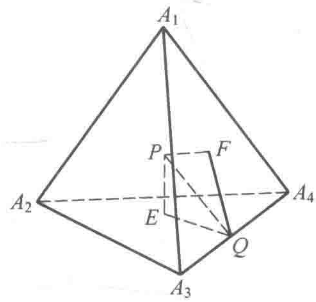


图 14.2

所以

$$r_1 + r_2 = h_{34}(\sin\angle PQE + \sin\angle PQF) = $$
$$2h_{34}\sin\frac{\angle PQE + \angle PQF}{2} \cdot$$
$$\cos\frac{\angle PQE - \angle PQF}{2} \leqslant$$
$$2h_{34}\sin\frac{\angle PQE + \angle PQF}{2} = 2h_{34}\sin\frac{\theta_{12}}{2}$$

同理 $r_1 + r_3 \leqslant 2h_{24}\sin\frac{\theta_{13}}{2}, r_1 + r_4 \leqslant 2h_{23}\sin\frac{\theta_{14}}{2}$

$$r_2 + r_3 \leqslant 2h_{14}\sin\frac{\theta_{23}}{2}, r_2 + r_4 \leqslant 2h_{13}\sin\frac{\theta_{24}}{2}, r_3 + r_4 \leqslant 2h_{12}\sin\frac{\theta_{34}}{2}$$

将以上六式相加并注意到 $\theta_{12} = \theta_{34} = \alpha, \theta_{13} = \theta_{24} = \beta, \theta_{14} = \theta_{23} = \gamma$，得

$$3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \leqslant 2\left[(h_{12} + h_{34})\sin\frac{\alpha}{2} + (h_{13} + h_{24})\sin\frac{\beta}{2} + (h_{14} + h_{23})\sin\frac{\gamma}{2}\right] \leqslant$$
$$2\left[(h_{12} + h_{34})^2 + (h_{13} + h_{24})^2 + (h_{14} + h_{23})^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由四面体中的射影定理，有

$$S_1 = S_2\cos\theta_{12} + S_3\cos\theta_{13} + S_4\cos\theta_{14}$$

由 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$，有

$$\cos\theta_{12} + \cos\theta_{13} + \cos\theta_{14} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$$

于是 $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}[3 - (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)] = 1$

故 $3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \leqslant 2\left[(h_{12} + h_{34})^2 + (h_{13} + h_{24})^2 + (h_{14} + h_{23})^2\right]^{\frac{1}{2}}$

变形可得所证. 由以上证明易知当且仅当 P 为四面体内心时等号成立. 证毕.

9. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是等面四面体，P 是四面体内任一点，点 P 到各侧面 f_i 的距离为 r_i，到各顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum R_1 \geqslant 3\sum r_1 \tag{14.31}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为垂心四面体，P 为垂心时取等号.

证明 设 A_iP 的延长线交侧面 f_i 于点 B_i，记 $l_i=PB_i(i=1,2,3,4)$，四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面积为 S，则

$$\frac{A_1B_1}{l_1}=\frac{V}{V_{\text{四面体}PA_2A_3A_4}},\frac{R_1}{l_1}=\frac{V-V_{\text{四面体}PA_2A_3A_4}}{V_{\text{四面体}PA_2A_3A_4}}$$

于是

$$R_1\cdot\frac{r_1}{l_1}S=r_2S+r_3S+r_4S$$

由于 $\frac{r_1}{l_1}\leqslant 1$，所以 $R_1\geqslant r_2+r_3+r_4$. 同理

$$R_2\geqslant r_1+r_3+r_4,R_3\geqslant r_1+r_2+r_4,R_4\geqslant r_1+r_2+r_3$$

将以上四式相加，得

$$R_1+R_2+R_3+R_4\geqslant 3(r_1+r_2+r_3+r_4)$$

当且仅当 $r_i=l_i(i=1,2,3,4)$，即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是垂心四面体且 P 为四面体的垂心时等号成立. 证毕.

然而，不等式

$$R_1+R_2+R_3+R_4\geqslant 3(r_1+r_2+r_3+r_4)$$

一般说来不成立，虽然它很像是厄尔多斯－莫德耳不等式的自然推广. 事实上，它对于图 14.3 中表示的退化的四面体是不成立的.

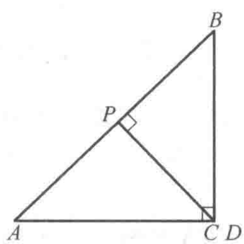


图 14.3

猜想 对于一般四面体，成立：$R_1+R_2+R_3+R_4>2\sqrt{2}(r_1+r_2+r_3+r_4)$.

14.3 正四面体

我们称六条棱相等的四面体为正四面体.

1*. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，四面体的高为 h，P 到各棱 A_iA_j 的距离分别为 $h_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}h \tag{14.32}$$

当且仅当 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的中心时取等号.

证明 如图 14.4 所示，设四面体以 A_iA_j 为棱的内二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<$

$j \leqslant 4$)，记点 P 到各侧面 f_i 的距离为 $r_i(i=1,2,3,4)$，作 $PE \perp f_1, PF \perp f_2$，$EQ \perp A_3A_4$，则 $FQ \perp A_3A_4, PQ \perp A_3A_4$，且有 $PQ = h_{34}, PE = r_1, PF = r_2$. 于是

$$r_1 = h_{34}\sin\angle PQE, r_2 = h_{34}\sin\angle PQF$$

所以

$$r_1 + r_2 = h_{34}(\sin\angle PQE + \sin\angle PQF) =$$

$$2h_{34}\sin\frac{\angle PQE + \angle PQF}{2}\cos\frac{\angle PQE - \angle PQF}{2} \leqslant$$

$$2h_{34}\sin\frac{\angle PQE + \angle PQF}{2} = 2h_{34}\sin\frac{\theta_{12}}{2}$$

易知

$$\sin\frac{\theta_{12}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故

$$r_1 + r_2 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{34}$$

同理

$$r_1 + r_3 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{24}$$

$$r_1 + r_4 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{23}, r_2 + r_3 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{14}$$

$$r_2 + r_4 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{13}, r_3 + r_4 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}h_{12}$$

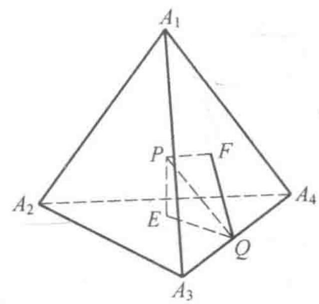


图 14.4

将以上六式相加，并注意到 $h = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$，得

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}\right) \geqslant 3\sum_{i=1}^{4} r_i = 3h$$

变形既得所证. 证毕.

2*. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，P 到各侧面 f_i 的距离为 r_i，到各棱 A_iA_j 的距离分别为 h_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4} r_i^2 \geqslant \frac{2}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij}^2 \tag{14.33}$$

当且仅当点 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中心时取等号.

证明 如图 14.4 所示，由式(14.32)的证明可知

$$r_1 = h_{34}\sin\angle PQE, r_2 = h_{34}\sin\angle PQF$$

于是有

$$r_1^2 + r_2^2 = h_{34}^2(\sin^2\angle PQE + \sin^2\angle PQF) =$$

$$h_{34}^2\left[1 - \frac{1}{2}(\cos^2\angle PQE + \cos^2\angle PQF)\right] =$$

$$h_{34}^2[1 - \cos(\angle PQE + \angle PQF)\cos(\angle PQE - \angle PQF)] \geqslant$$

$$h_{34}^2(1 - \cos\theta_{34}) = \frac{2}{3}h_{34}^2$$

同理

$$r_1^2 + r_3^2 \geqslant \frac{2}{3}h_{24}^2, r_1^2 + r_4^2 \geqslant \frac{2}{3}h_{23}^2, r_2^2 + r_3^2 \geqslant \frac{2}{3}h_{14}^2$$

$$r_2^2+r_4^2\geqslant\frac{2}{3}h_{13}^2,r_3^2+r_4^2\geqslant\frac{2}{3}h_{12}^2$$

将以上六式相加,得

$$3\sum_{i=1}^{4}r_i^2\geqslant\frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}h_{ij}^2$$

变形可得所证. 证毕.

3*. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,P 到顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$,到各棱 A_iA_j 的距离分别为 $h_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}R_i^2\leqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}h_{ij}^2 \qquad (14.34)$$

当且仅当 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中心时取等号.

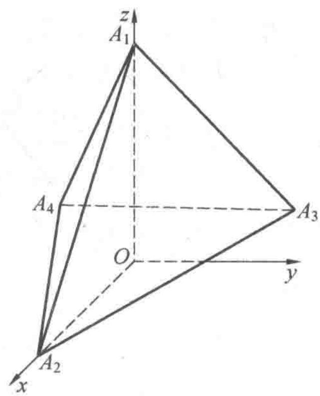


图 14.5

证明 建立直角坐标系,如图 14.5 所示. 设 $A_1(0,0,2\sqrt{2})$,$A_2(2,0,0)$,$A_3(-1,\sqrt{3},0)$,$A_4(-1,-\sqrt{3},0)$. 点 P 的直角坐标为 (x,y,z). 点 P 的重心规范坐标为 $(a:b:c:d)$ 且 $\sum a=1$.

由于点 P 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部,所以 $a,b,c,d>0$.

由重心坐标性质,有

$$x=2b-c-d,y=\sqrt{3}(c-d),z=2\sqrt{2}a$$

于是
$$R_1=\sqrt{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8(a-1)^2}$$
$$R_2=\sqrt{(2b-c-d-2)^2+3(c-d)^2+8a^2}$$
$$R_3=\sqrt{(2b-c-d+1)^2+3(c-d-1)^2+8a^2}$$
$$R_4=\sqrt{(2b-c-d+1)^2+3(c-d+1)^2+8a^2}$$

又 $\overrightarrow{A_2P}=(2b-c-d-2,\sqrt{3}(c-d),2\sqrt{2}a)$,$\dfrac{\overrightarrow{A_2A_1}}{|\overrightarrow{A_2A_1}|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

所以
$$\frac{\overrightarrow{A_2A_1}}{|\overrightarrow{A_2A_1}|}\cdot\overrightarrow{A_2P}=\frac{1}{\sqrt{3}}(4a-2b+c+d+2)$$

故
$$h_{12}=\sqrt{|\overrightarrow{A_2P}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{A_2A_1}}{|\overrightarrow{A_2A_1}|}\cdot\overrightarrow{A_2P}\right)^2}=$$
$$\sqrt{(2b-c-d-2)^2+3(c-d)^2+8a^2-\frac{1}{3}(4a-2b+c+d+2)^2}$$

同理

$$h_{13}=\sqrt{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8(a-1)^2-\frac{1}{3}(4a+b-2c+d-4)^2}$$

$$h_{14}=\sqrt{(2b-c-d)^2+3(c-d)^2+8(a-1)^2-\frac{1}{3}(4a+b+c-2d-4)^2}$$

$$h_{23}=\sqrt{(2b-c-d-2)^2+3(c-d)^2+8a^2-3(b-c-1)^2}$$

$$h_{24}=\sqrt{(2b-c-d-2)^2+3(c-d)^2+8a^2-3(b-d-1)^2}$$

$$h_{34}=\sqrt{(2b-c-d+1)^2+8a^2}$$

用拉格朗日乘子法证明之.

设 $f=2\sum h_{12}^2-\sum R_1^2$. 令

$$F=f+\lambda\left(\sum a-1\right)=$$

$$32a^2+16b^2+16c^2+16d^2-16bc-16bd-16cd-$$

$$16a+2+\lambda\left(\sum a-1\right)$$

$(a+b+c+d=1,a>0,b>0,c>0,d>0)$

$$\begin{cases}F'_a=64a-16+\lambda=0\\F'_b=32b-16c-16d+\lambda=0\\F'_c=32c-16c-16d+\lambda=0\\F'_d=32d-16c-16d+\lambda=0\\a+b+c+d=1\end{cases}$$

解之得唯一的驻点 $a=b=c=d=\frac{1}{4},\lambda=0$,且 $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=0$.

下面考虑边界情形.

当 $a=0$ 时, $f=16(b^2+c^2+d^2-bc-bd-cd)+2>0$;

当 $b=0$ 时, $f=32a^2+16c^2+16d^2-16cd-16a+2=2(4a-1)^2+16(c^2+d^2-cd)>0$;

同理可证 $c=0$ 或 $d=0$ 时,$f>0$.

综上得 $f_{\min}=0$. 证毕.

由式(14.33),(14.34)得:

4*. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,P 到各侧面 f_i 的距离为 r_i,到顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}R_i^2\leqslant 9\sum_{i=1}^{4}r_i^2 \tag{14.35}$$

当且仅当点 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中心时取等号.

5*. 设点 P 是棱长为 a 的正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,点 P 到各顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4}R_i\geqslant\sqrt{6}\,a \tag{14.36}$$

证明 由式(14.31),有

$$\sum_{i=1}^{4} R_i \geqslant 3\sum_{i=1}^{4} r_i = 3h = \sqrt{6}\,a$$

证毕.

6.(1979,希腊奥林匹克问题)如果棱长为 a 的正四面体内接于棱长为 b 的正四面体,使得它的每一个顶点恰好在后者的一个面上,则

$$3a \geqslant b \tag{14.37}$$

证明 设正四面体 T_1 内接于正四面体 T_2,则四面体 T_1 的外接球面 S 的半径 R_1 不小于内切于四面体 T_2 的半径 r_2. 事实上,作平行于 T_2 各面且与球面 S 相切的平面,可以得到一个四面体 T_3,因为它与 T_2 相似,所以也是正四面体,它外切于球面 S 且包含四面体 T_2. 因此,T_3 的内切球半径 $r_3 = R_1$ 不小于 r_2. 因为内切于正四面体 T_1 的球面半径 r_1 是 T_1 的外接球面半径 R_1 的三分之一,所以 $3r_1 = R_1 \geqslant r_2$. 由此便得到要证明的不等式. 证毕.

猜想 1. 设点 P 是棱长为 a 的正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,P 到各顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{i=1}^{4} \sqrt{R_i} \leqslant 2\sqrt[4]{6}\,\sqrt{a}$$

2. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点,P 到顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$,到各棱 A_iA_j 的距离分别为 $h_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} h_{ij} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4} R_i$$

当且仅当点 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中心时取等号.

第十五章 构成四面体的条件

1^{*}. 三组长度为 $a,a';b,b';c,c'$ 的线段能够分别作为四面体的三组对棱的充要条件是

$$|2a'^2(a^2-b^2-c'^2)+(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)|<$$

$$16\sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}\sqrt{p(p-a')(p-b)(p-c)} \tag{15.1}$$

其中 $p'=\dfrac{a'+b'+c'}{2}$, $p=\dfrac{a'+b+c}{2}$.

证明 设四面体 $ABCD$(图 15.1)的三组对棱分别为 a, $a';b,b';c,c'$. 将其侧面 BCD 与 ABC 展在平面上(图 15.2). 由余弦定理,得

$$\cos\angle ABC=\frac{a'^2+c'^2-b'^2}{2a'c'}$$

$$\cos\angle CBD=\frac{b^2+a'^2-c^2}{2a'b}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle ABD=\cos(\angle ABC+\angle CBD)=\\ &\cos\angle ABC\cos\angle CBD-\sin\angle ABC\sin\angle CBD=\\ &\frac{a'^2+c'^2-b'^2}{2a'c'}\cdot\frac{b^2+a'^2-c^2}{2a'b}-\\ &\sqrt{1-\left(\frac{a'^2+c'^2-b'^2}{2a'c'}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{b^2+a'^2-c^2}{2a'b}\right)^2}=\\ &\frac{(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)}{4a'^2bc'}-\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{4a'^2c'^2-(a'^2+c'^2-b'^2)^2}\sqrt{4a'^2b^2-(b^2+a'^2-c^2)^2}}{4a'^2bc'}=$$

$$\frac{(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)}{4a'^2bc'}-$$

$$\frac{\sqrt{2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4}}{4a'^2bc'}\cdot$$

$$\sqrt{2a'^2b^2+2b^2c^2+2c^2a'^2-a'^4-b^4-c^4}$$

所以 $AD^2=b^2+c'^2-2bc'\cos(\angle ABC+\angle CBD)=$

$$b^2+c'^2-\Big[\frac{(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)}{2a'^2}-$$

$$\frac{\sqrt{2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4}}{a'}\cdot$$

$$\frac{\sqrt{2a'^2b^2+2b^2c^2+2c^2a'^2-a'^4-b^4-c^4}}{2a'}\Big] \tag{15.2}$$

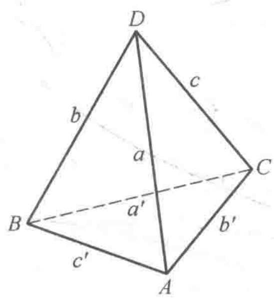


图 15.1

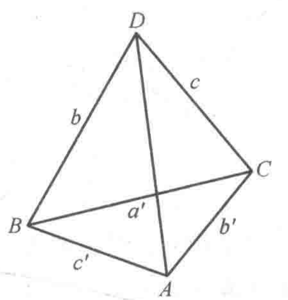


图 15.2

将四面体 $ABCD$ 侧面 BCD 与 ABC 相叠在平面上(图 15.3).

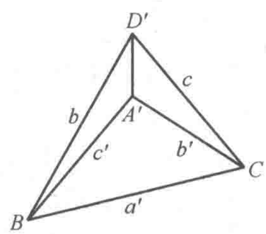


图 15.3

同理可得

$$A'D'^2=b^2+c'^2-\Big[\frac{(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)}{2a'^2}+$$

$$\frac{\sqrt{2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4}}{2a'}\cdot$$

$$\frac{\sqrt{2a'^2b^2+2b^2c^2+2c^2a'^2-a'^4-b^4-c^4}}{a'}\Big] \tag{15.3}$$

长度为 $a,a';b,b';c,c'$ 的线段能够分别作为四面体的三组对棱的充要条件是

$$A'D' < a < AD$$

即
$$A'D'^2 < a^2 < AD^2 \tag{15.4}$$

将式(15.2),(15.3)代入式(15.4)整理得

$$\begin{aligned}&|2a'^2(a^2-b^2-c'^2)+(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)|<\\&\sqrt{2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4}\cdot\\&\sqrt{2a'^2b^2+2b^2c^2+2c^2a'^2-a'^4-b^4-c^4}\end{aligned} \tag{15.5}$$

变形得

$$\begin{aligned}&|2a'^2(a^2-b^2-c'^2)+(a'^2+c'^2-b'^2)(b^2+a'^2-c^2)|<\\&16\sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}\sqrt{p(p-a')(p-b)(p-c)}\end{aligned}$$

其中 $p'=\dfrac{a'+b'+c'}{2}$,$p=\dfrac{a'+b+c}{2}$. 证毕.

该定理有意思的一点在于将 6 个正数构成四面体的充要条件用一个式子表达出来.

在式(15.5)中,当 $2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4>0$ 时,对式(15.5)平方、展开、整理得

$$\begin{aligned}F(a,a',b,b',c,c')=&\sum a^2a'^2(-a^2-a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-\\&a^2b^2c'^2-a^2b'^2c^2-a'^2b^2c^2-a'^2b'^2c'^2>0\end{aligned}$$

于是有:

2.(杨路、张景中) 三组长度为 $a,a';b,b';c,c'$ 的线段能够分别作为四面体的三组对棱的充要条件是

$$G(a',b',c')=2a'^2c'^2+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2-a'^4-b'^4-c'^4>0 \tag{15.6}$$

且
$$\begin{aligned}F(a,a',b,b',c,c')=&\sum a^2a'^2(-a^2-a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-\\&a^2b^2c'^2-a^2b'^2c^2-a'^2b^2c^2-a'^2b'^2c'^2>0\end{aligned} \tag{15.7}$$

这个结论是杨路、张景中两位先生在 1980 年给出的,这里给出了一个初等证明.

对于定理的充要条件,很容易认为:只要对于 $\triangle ABC$ 的三边 a',b',c',$\triangle ADB$ 的三边 a,b,c',$\triangle BCD$ 的三边 a',b,c,$\triangle ACD$ 的三边 a,b',c 分别满足构成三角形的条件就可以保证 6 个正数 a,a',b,b',c,c' 可以构成四面体的 6 条棱长. 其实不然,例如:$a=9,a'=10$, $b=8,b'=7,c=11,c'=14$ 时,$\triangle ABC$,$\triangle ADB$,$\triangle BCD$,$\triangle ACD$ 都存在,但是

$$F(a,a',b,b',c,c')=-552\ 321<0$$

由上述定理可知,这样的 6 个正数不能构成四面体的三组对棱长,从而不能构成四面体.

没有条件(15.6)行不行呢? 不行. 例如:$a=0.1,a'=6,b=15,b'=7,c=8$,

$c'=14$. 这时 $G(a',b',c')=-5\ 265<0$, $F(a,a',b,b',c,c')=57.393\ 6>0$, 然而 $\triangle ABC$, $\triangle ADB$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ 均不存在，从而 $a=0.1$, $a'=6$, $b=15$, $b'=7$, $c=8$, $c'=14$ 不能构成四面体.

3.（金磊）已知 $x\in(0,2\pi]$，且 x 的六个三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 恰是一个四面体的六条棱长，求 x 的取值范围.

解 显然 x 为锐角，且六个三角函数值两两关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称. 故只需考虑 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 即可.

当 $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，可以验证如图 15.4 安排的六个三角函数值满足条件.

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{6}$ 时，$2\leqslant\csc x$, $\sin x<\tan x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x$, $\sqrt{3}\leqslant\cot x$, $\sec x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin x$, $\tan x$ 必然一个与 $\sec x$ 相邻，一个与 $\csc x$ 相邻，不妨设 $\sin x$ 与 $\csc x$ 相邻(另一种情形类似).

如图 15.4，设 $BC=\csc x$, $CA=\sin x$, $AD=\tan x$，则在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB=\cot x$，从而在 $\triangle ABD$ 中，有 $\cos x+\tan x<\sec x+\tan x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\leqslant\cot x$，故无法构成三角形，即此时 x 不满足条件，对称地得到 $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{3}$ 时满足.

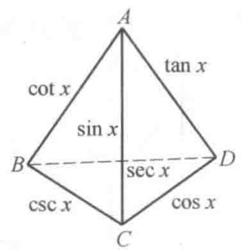


图 15.4

因此 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.

证明四面体不等式的几种方法

第十六章

证明四面体不等式往往需要综合地运用几何、代数、三角等方面知识，有时还要用到线性代数和微积分的知识. 然而有些不等式的证明还需要用到其他的一些方法，本章就介绍这方面的内容.

16.1 Cayley 行列式法

16.1.1 理论与方法

A. Cayley 于 1841 年建立一个如下有趣的结论.

定理 16.1(Cayley **定理**) 设 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 是三维空间中的点，令 $a_{ij}=a_{ji}=|A_iA_j|\ (1\leqslant i<j\leqslant 5)$，则有

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{15}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 & a_{35}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 & a_{45}^2 \\ 1 & a_{51}^2 & a_{52}^2 & a_{53}^2 & a_{54}^2 & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{16.1}$$

此行列式通常用 $D(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ 表示，叫作点集 $\{A_1A_2A_3A_4A_5\}$ 的 Cayley－Menger 行列式.

Cayley 定理的证法不只一种,这里用线性代数的知识给出一个证明.

证明 取 A_5 为三维笛卡儿坐标原点 O,设 $\overrightarrow{OA_i}=\boldsymbol{\alpha}_i\ (1\leqslant i\leqslant 4)$,$\overrightarrow{OA_5}=\mathbf{0}$.

则
$$(\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_j)^2=a_{ij}^2\quad(1\leqslant i,j\leqslant 5)$$

考虑行列式

$$D'(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 1\\ \vdots & & \\ 1 & & \boxed{-\frac{1}{2}a_{ij}^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 1\\ \vdots & & \\ 1 & & -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_j)^2\end{vmatrix}$$

其中$\boxed{-\frac{1}{2}a_{ij}^2}$表示 5 阶方阵.对上式作如下不改变行列式值的变换:把第 0 行(列)乘$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_k^2$加到第 k 行(列),得到

$$D'(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 1\\ \vdots & & \\ 1 & & \boxed{\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j}\end{vmatrix}=-\left|\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j\right|_{4\times 4}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})\ (i=1,2,3,4)$,由内积公式 $\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j=\sum\limits_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}$

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j\right|_{4\times 4}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

由此可得式(16.1)成立.

Cayley 定理有许多应用,例如:

引理 16.1 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为一四面体的四个顶点,R 为其外接球半径,令

$$D(A_1,A_2,A_3,A_4)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2\\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2\\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2\\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0\end{vmatrix}\tag{16.2}$$

$$D_0(A_1,A_2,A_3,A_4)=\begin{vmatrix}0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2\\ a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2\\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2\\ a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0\end{vmatrix}\tag{16.3}$$

则有

$$R^2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{D_0(A_1,A_2,A_3,A_4)}{D(A_1,A_2,A_3,A_4)} \tag{16.4}$$

证明 设 A_5 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球球心，则

$$a_{15}=a_{25}=a_{35}=a_{45}=R$$

由 Cayley 定理就有

$$D(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & R^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & R^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 & R^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 & R^2 \\ 1 & R^2 & R^2 & R^2 & R^2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

化简后得到 $D_0(A_1,A_2,A_3,A_4)+2R^2\cdot D(A_1,A_2,A_3,A_4)=0$. 由此可解得式(16.4).

引理 16.2 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积 V 可以表为下述行列式的形式

$$V^2=\frac{1}{288}\cdot D(A_1,A_2,A_3,A_4) \tag{16.5}$$

证明 将行列式 $D(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 展开整理，由式(1.18)即得所证.

引理 16.3(杨路) 设 $b_1=a_{23}\cdot a_{14}, b_2=a_{13}\cdot a_{24}, b_3=a_{12}\cdot a_{34}$，则

$$V\cdot R=\frac{1}{6}\sqrt{p(p-b_1)(p-b_2)(p-b_3)}=\frac{1}{6}\Delta' \tag{16.6}$$

其中 $p=\dfrac{b_1+b_2+b_3}{2}$.

证明 因为

$$b_1=a_{23}\cdot a_{14}, b_2=a_{13}\cdot a_{24}, b_3=a_{12}\cdot a_{34} \tag{16.7}$$

由空间 Ptolemy 不等式得知：b_1,b_2,b_3 三数中任意两者之和大于第三者，故可作一个边长为 b_1,b_2,b_3 的 $\triangle B_1B_2B_3$，设其面积为 Δ. 众所熟知

$$b_1^4+b_2^4+b_3^4-2b_2^2b_3^2-2b_3^2b_1^2-2b_1^2b_2^2=-16\Delta'^2 \tag{16.8}$$

将行列式 $D_0(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 展开，由式(15.7),(15.8)得到

$$D_0(A_1,A_2,A_3,A_4)=-16\Delta'^2 \tag{16.9}$$

将式(16.5),(16.9)代入式(16.4)就得到

$$6\cdot V\cdot R=\Delta'$$

由引理 16.3 可得三角形到四面体的等价变换.

定理 16.2 在 $\triangle ABC$ 中，若关于 a,b,c,Δ 的关系为 f，则在四面体 $ABCD$ 中，关于 $aa',bb',cc',6RV$ 的关系亦为 f，即有

$$f(a,b,c,\Delta)\equiv f(aa',bb',cc',6RV) \tag{16.10}$$

16.1.2 应用

例 16.1 在 $\triangle ABC$ 中,有:

1′. $\Delta=\frac{abc}{4R}$;

2′. A. Oppenheim 不等式

$$(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\Delta^2\leqslant(\lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2)^2$$

3′. Finsler-Hadwiger 不等式

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}\Delta\leqslant a^2+b^2+c^2$$

在四面体 $ABCD$ 中,有:

1.(杨路) 设一个四面体的体积为 V,外接球半径为 R,其 6 条棱的乘积为 P,则有

$$V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}\cdot P^{\frac{2}{3}}\tag{16.11}$$

2. $$(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)(24RV)^2\leqslant(\lambda_1a^2a'^2+\lambda_2b^2b'^2+\lambda_3c^2c'^2)^2\tag{16.12}$$

3. $$\begin{aligned}&(aa'-bb')^2+(bb'-cc')^2+(cc'-aa')^2+24\sqrt{3}RV\leqslant\\&(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2\end{aligned}\tag{16.13}$$

以上不等式等号成立的充分必要条件是:该四面体的三组对棱的积相等.

对于式(16.11)的证明,由 Polya-Szego 不等式 $\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$,得

$$6RV=\Delta'\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(aa'bb'cc')^{\frac{2}{3}}$$

对于式(16.12),(16.13),只要在 A. Oppenheim 不等式和 Finsler-Hadwiger 不等式中,将 a,b,c,Δ 换成 $aa',bb',cc',6RV$ 后立即可得到:

4. 在四面体 $ABCD$ 中,有

$$[(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2]\cdot(8RV)^2\leqslant(abca'b'c')^2\tag{16.14}$$

等号成立的充分必要条件是:该四面体的三组对棱的积相等.

证明 在 $\triangle ABC$ 中,有 Neuberg 不等式 $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R'^2$($R'$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径),注意到 $R'=\frac{abc}{4\Delta}$,则 Neuberg 不等式等价于

$$\frac{16}{9}\cdot(a^2+b^2+c^2)\cdot\Delta^2\leqslant(abc)^2$$

由定理 16.2 知,此不等式中 a,b,c,Δ 换成 $aa',bb',cc',6RV$ 后,得

$$\frac{16}{9}[(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2](6RV)^2\leqslant(aa'bb'cc')^2$$

即 $$[(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2]\cdot(8RV)^2\leqslant(abca'b'c')^2$$

在式(16.14)中,用琴生不等式,得:

在四面体 $ABCD$ 中,有

$$\frac{8}{3}\sqrt{3}(aa'+bb'+cc')RV\leqslant aa'bb'cc' \tag{16.15}$$

在式(16.15)中,由算术-几何不等式得

$$aa'+bb'+cc'\geqslant 3(aa'bb'cc')^{\frac{1}{3}}$$

得 $$aa'bb'cc'\geqslant\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot[3(aa'bb'cc')^{\frac{1}{3}}]\cdot RV$$

化简后即得 $RV\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24}(aa'bb'cc')^{\frac{2}{3}}$,所以不等式(16.14)强于(16.11).

5. 在四面体 $ABCD$ 中,有

$$12V^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)\leqslant(aa'bb'cc')^{\frac{4}{3}} \tag{16.16}$$

证明 在四面体 $ABCD$ 中,有不等式

$$a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2\leqslant 16R^2 \tag{16.17}$$

由式(16.4),得 $R=\frac{\Delta'}{6V}$,代入式(16.17),经整理,得

$$\frac{9}{4}V^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)\leqslant\Delta'^2$$

由 $\triangle ABC$ 中的 Polya-Szego 不等式 $\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$ 得

$$\Delta'\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(aa'bb'cc')^{\frac{2}{3}}$$

由此可推出式(16.16).

6*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积和外接球的半径分别为 V,R,顶点 A_i 所对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$,记 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\prod_{i=1}^{4}S_i\geqslant\frac{3^4}{2^5}\Big(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\Big)^{\frac{1}{3}}\cdot V^2 \tag{16.18}$$

证明 设侧面 S_i 与 S_j 所成的二面角为 θ_{ij},由四面体体积公式 $S_iS_j=\frac{3a_{ij}V}{2\sin\theta_{ij}}$ 得

$$(S_1S_2S_3S_4)^3=\frac{3^6\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\cdot V^6}{2^6\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}}$$

将 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sin\theta_{ij}\leqslant\frac{2^9}{3^6}$ 代入即可得式(16.18).

7*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积和外接球的半径分别为 V,R,顶点 A_i 所

对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，记 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\left(\prod_{i=1}^{4}S_i\right)^2\geqslant\frac{3^{\frac{17}{2}}}{2^7}\cdot RV^5 \tag{16.19}$$

证明 将式(16.11)代入式(16.18)整理可得式(16.19)．证毕.

8. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积和外接球的半径分别为 V，顶点 A_i 所对的侧面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，记 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\left(\sum S_i\right)^2-\frac{4}{3}\sum S_i^2\geqslant 2\sqrt{2}V\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}\right) \tag{16.20}$$

证明 设侧面 S_i 与 S_j 所成的二面角为 $\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，由射影定理 $S_1=S_2\cos\theta_{12}+S_3\cos\theta_{13}+S_4\cos\theta_{14}$ 等，得

$$\begin{aligned}3\left(\sum S_i\right)^2-4\sum S_i^2=&\left(\sum S_i\right)^2-2\sum S_i^2+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=\\&\sum(S_2+S_3+S_4-S_1)S_1+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=\\&\sum[S_1S_2(1-\cos\theta_{12})+S_1S_3(1-\cos\theta_{13})+\\&S_1S_4(1-\cos\theta_{14})]+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=\\&\sum\left(S_1S_22\sin^2\frac{\theta_{12}}{2}+S_1S_32\sin^2\frac{\theta_{13}}{2}+S_1S_42\sin^2\frac{\theta_{14}}{2}\right)+\\&4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j=4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\left(\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2}+1\right)\end{aligned}$$

用导数易证 $\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2}+1\geqslant\sqrt{2}\sin\theta_{ij}\ (0<\theta_{ij}<\pi)$，注意到

$$V=\frac{2S_iS_j\sin\theta_{ij}}{3a_{ij}}$$

$$3\left(\sum S_i\right)^2-4\sum S_i^2\geqslant 4\sqrt{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}S_iS_j\sin\theta_{ij}=6\sqrt{2}V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

由此可推出：

9. $$\left(\sum S_i\right)^2\geqslant 3\sqrt{2}V\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

10. $$\sum S_i\geqslant\sqrt{2}r\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

11. $$V\geqslant\frac{\sqrt{2}}{3}r^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

16.2 向 量 法

向量法是证明四面体不等式的重要方法之一．以下我们用向量法给出一些

不等式,大家可以从中体会向量法在证明四面体不等式中的应用.首先,我们证明一个有趣的恒等式.

引理 16.4 对于任意一组非零实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,取点 P 为 4 点 A_1,A_2,A_3,A_4 赋予质量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 后的重心,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,$O$ 为四面体内任一点,记 $R_i=|\overrightarrow{OA_i}|(i=1,2,3,4)$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2+|\overrightarrow{OP}|^2 \tag{16.21}$$

证明 取 P 为 4 点 A_1,A_2,A_3,A_4 赋予质量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 后的重心(这里的质量可认为有正有负),则

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2=&|\lambda_1\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\overrightarrow{OA_3}+\lambda_4\overrightarrow{OA_4}|^2=\\&\sum_{i=1}^{4}\lambda_1^2|\overrightarrow{OA_1}|^2+2\sum\lambda_i\lambda_j(\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j})=\\&\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2R_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j(|\overrightarrow{OA_i}|^2+|\overrightarrow{OA_j}|^2-|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}|^2)=\\&\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2R_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j(R_i^2+R_j^2)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2=\\&\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2\end{aligned}$$

证毕.

1. 对于任意一组正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,取 P 为 4 点 A_1,A_2,A_3,A_4 赋予质量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 后的质心,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,记 $R_i=|\overrightarrow{PA_i}|(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i\right)^2 \tag{16.22}$$

当且仅当 $R_1=R_2=R_3=R_4$ 时取等号.

这里要特别注意:P 为 4 点 A_1,A_2,A_3,A_4 赋予质量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 后的重心,而不是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心.

证明 在式(16.21)中,取 $O=P$,则有 $\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2$.由柯西不等式得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2=\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_iR_i\right)^2$$

证毕.

2*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$,侧面 f_i 上的中线为 $m_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,则

$$9 \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{a_{ij}^2}{m_i m_j} \leqslant \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{16.23}$$

证明 在式(16.22)中,令 $\lambda_i \to \frac{\lambda_i}{R_i}(i=1,2,3,4)$,得

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_i \lambda_j \frac{a_{ij}^2}{R_i R_j} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\right)^2$$

取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$,这时质心 P 即为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心 G,于是

$$R_i = |GA_i| = \frac{3}{4} m_i \quad (i=1,2,3,4)$$

代入上式,得 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{a_{ij}^2}{m_i m_j} \geqslant 9$,即得不等式(16.23)的左端;

另外,由于 $h_i \leqslant m_i(i=1,2,3,4)$,所以 $\sum \frac{1}{m_i} \leqslant \sum \frac{1}{h_i} = \frac{1}{r}$.

在式(16.26)中,令 $\lambda_i = \frac{1}{m_i}(i=1,2,3,4)$,得

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{a_{ij}^2}{m_i m_j} \leqslant R^2 \left(\sum \frac{1}{m_i}\right)^2 \leqslant \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

证毕.

3. 对于任意一组非零实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij} = |A_iA_j|(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,$O$ 为四面体内任一点,记 $R_i = |\overrightarrow{OA_i}|(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{4} \lambda_i R_i^2 \tag{16.24}$$

当且仅当向量 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OA_3} + \lambda_4 \overrightarrow{OA_4} = \mathbf{0}$ 时取等号.

实际上,在式(16.21)中,因为 $|\overrightarrow{OP}|^2 \geqslant 0$,故式(16.24)得证.当点 P 与 O 重合时,等号成立.

特别取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$,由式(16.24)得:

4. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij} = |A_iA_j|(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,$P$ 为四面体内任意一点.记 $|PA_i| = R_i(i=1,2,3,4)$,则

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{4} R_i^2 \tag{16.25}$$

当且仅当 O 为四面体的重心时取等号.

在式(16.24)中,设 O 为四面体外接球的球心,则 $R_i = R(i=1,2,3,4)$,我们有:

5. 对于任意一组非零实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij} = |A_iA_j|(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,其外接球半径为 R,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j a_{ij}^2\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\Big)^2R^2 \tag{16.26}$$

其中等号当且仅当向量$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\overrightarrow{OA_3}+\lambda_4\overrightarrow{OA_4}$对应的点 P 与四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 重合时取到.

6.
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant 16R^2 \tag{16.27}$$

当且仅当外心与重心重合,即对棱分别相等时取等号.

证明 在式(16.21)中取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$,此时点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心 G,于是

$$|\overrightarrow{OG}|^2=16R^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\geqslant 0$$

当且仅当外心与重心重合时取等号.

下面证明外心与重心重合的充要条件是对棱分别相等.由式(1.28)得

$$GA_1^2=\frac{1}{16}[3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2-4(a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2)]$$

$$GA_2^2=\frac{1}{16}[3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2-4(a_{13}^2+a_{14}^2+a_{34}^2)]$$

$$GA_3^2=\frac{1}{16}[3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2-4(a_{12}^2+a_{14}^2+a_{24}^2)]$$

$$GA_4^2=\frac{1}{16}[3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2-4(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2)]$$

注意到 $GA_1=GA_2=GA_3=GA_4=R$,得

$$a_{12}^2+a_{13}^2=a_{24}^2+a_{34}^2$$
$$a_{13}^2+a_{14}^2=a_{23}^2+a_{24}^2$$
$$a_{12}^2+a_{14}^2=a_{23}^2+a_{34}^2$$

由此得 $a_{12}=a_{34}, a_{13}=a_{24}, a_{14}=a_{23}$.

反之,把 $a_{12}=a_{34}, a_{13}=a_{24}, a_{14}=a_{23}$ 代入上式,得 $GA_1=GA_2=GA_3=GA_4$,故四面体外心与重心重合.证毕.

不等式(16.24)可以看成不等式(16.25)的一个加权,而不等式(16.26)的内涵非常丰富,我们应给予足够的重视,例如,我们有:

7.设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球、内切球、旁切球半径分别为 $R, r, r_i(i=1,2,3,4)$,则

$$36\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{r_ir_j}\leqslant 4\cdot\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{16.28}$$

证明 在式(16.26)中,$\lambda_i=\frac{1}{r_i}(i=1,2,3,4)$,注意到$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$,将其代入即可得式(16.28)右端不等式.

在式(16.22)中,令 $\lambda_i \to \dfrac{\lambda_i}{r_i}(i=1,2,3,4)$,得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j\frac{a_{ij}^2}{r_ir_j}\geqslant\left(\sum_{i=1}^4\lambda_i\frac{R_i}{r_i}\right)^2$$

取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$,这时质心 P 即为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心 G,于是

$$R_i=|GA_i|=\frac{3}{4}m_i\quad(i=1,2,3,4)$$

代入上式,得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{r_ir_j}\geqslant\frac{9}{16}\left(\sum_{i=1}^4\frac{m_i}{r_i}\right)^2$$

由于 $h_i\leqslant m_i(i=1,2,3,4)$,并注意到式(7.6):$\sum\dfrac{h_i}{r_i}\geqslant 8$,所以

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{r_ir_j}\geqslant\frac{9}{16}\left(\sum_{i=1}^4\frac{m_i}{r_i}\right)^2\geqslant\frac{9}{16}\left(\sum_{i=1}^4\frac{h_i}{r_i}\right)^2\geqslant 36$$

由此,不等式(16.28)左端得证.

8. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球半径、内切球半径、高分别为 $R,r,h_i(i=1,2,3,4)$,则

$$9\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{h_ih_j}\leqslant\left(\frac{R}{r}\right)^2\tag{16.29}$$

证明 在式(16.26)中,$\lambda_i=\dfrac{1}{h_i}(i=1,2,3,4)$,注意到 $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}+\dfrac{1}{h_4}=\dfrac{1}{r}$,将其代入即可得式(16.29)的右端;另外,由于 $h_i\leqslant m_i(i=1,2,3,4)$,得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{h_ih_j}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{a_{ij}^2}{m_im_j}\geqslant 9$$

这就证明了式(16.29)的左端不等式.

9. 设 M 为空间任意一点,G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心,则

$$\sum_{i=1}^4 MA_i^2\geqslant\sum_{i=1}^4 GA_i^2\tag{16.30}$$

证明 设 O 为空间直角坐标系原点,令 $\boldsymbol{v}_i=\overrightarrow{OA_i}$,$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OM}$,$\boldsymbol{u}=\overrightarrow{OG}$,则 $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{v}_i$,由

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4(|\overrightarrow{MA_i}|^2-|\overrightarrow{GA_i}|^2)=&\sum_{i=1}^4[(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{v}_i)^2-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_i)^2]=\\&\sum_{i=1}^4(\boldsymbol{d}^2-2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_i)=\\&4\boldsymbol{d}^2-8\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{u}^2+8\boldsymbol{u}^2=\\&4(\boldsymbol{d}^2-2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^2)=\end{aligned}$$

$$4\,(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{u})^2=4\,|\overrightarrow{MG}|^2$$

由 $|\overrightarrow{MG}|^2\geqslant 0$,即得式(16.30).证毕.

10*.设 G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心,记 $GA_i=R_i\,(i=1,2,3,4)$,r_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到棱 $A_iA_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的距离,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4}R_i \tag{16.31}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 由于 $\sum\limits_{i=1}^{4}\overrightarrow{GA_i}=\mathbf{0}$,则

$$0=\Big|\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{GA_i}\Big|^2=\sum_{i=1}^{4}R_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j\cos\angle A_iGA_j$$

故

$$4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j\cos^2\frac{1}{2}\angle A_iGA_j=-\sum_{i=1}^{4}R_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j \tag{16.32}$$

设 t_{ij} 为 $\triangle A_iGA_j$ 的内角 $\angle A_iGA_j$ 的平分线长,由角平分线公式可得

$$t_{ij}=\frac{2R_iR_j}{R_i+R_j}\cos\frac{1}{2}\angle A_iGA_j\leqslant\sqrt{R_iR_j}\cos\frac{1}{2}\angle A_iGA_j \tag{16.33}$$

将式(16.33)代入式(16.32)得

$$4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_{ij}^2\leqslant-\sum_{i=1}^{4}R_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j$$

由对称平均不等式得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j\leqslant\frac{3}{8}\Big(\sum_{i=1}^{4}R_i\Big)^2$$

故

$$\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_{ij}\Big)^2\leqslant 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_{ij}^2\leqslant\frac{3}{2}\Big(-\sum_{i=1}^{4}R_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j\Big)\leqslant$$

$$\frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{4}R_i\Big)^2+\frac{3}{4}\Big(\sum_{i=1}^{4}R_i\Big)^2\Big]=\frac{3}{4}\Big(\sum_{i=1}^{4}R_i\Big)^2$$

于是

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4}R_i \tag{16.34}$$

由证明过程可看出等号成立的条件,由式(16.34)可得(16.31).

11. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 三组对棱间距离分别为 d_1,d_2,d_3,中线长为 m_1,m_2,m_3,m_4,则

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}(d_1+d_2+d_2)\leqslant\sum_{i=1}^{4}m_i \tag{16.35}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

证明 注意到 $R_i=\dfrac{3}{4}m_i\,(i=1,2,3,4)$,$d_1\leqslant r_{12}+r_{34}$,$d_2\leqslant r_{23}+r_{14}$,$d\leqslant r_{13}+r_{24}$.

由不等式(16.31)得

$$d_1+d_2+d_3\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}r_{ij}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4}m_i\right)$$

整理可得不等式(16.35).

12*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<0 \tag{16.36}$$

证明 取单位向量 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\overrightarrow{OA_i}}{|\overrightarrow{OA_i}|}(i=1,2,3,4)$，设由向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3,4)$ 的终点构成的四面体为 $B_1B_2B_3B_4$，因为 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，所以 $\boldsymbol{e}_1$ 的相反向量 $-\boldsymbol{e}_1$ 与平面 $B_2B_3B_4$ 的交点在 $\triangle B_2B_3B_4$ 内，并记其为 P，考虑

$$Q=-\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|\cos\theta$$

其中 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$ 为通过 $\triangle B_2B_3B_4$ 的重心的常向量，$\theta=\langle-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{u}\rangle$.

不难看出，当 θ 最大时，Q 最小. 因为 P 在 $\triangle B_2B_3B_4$ 内，所以当 $-\boldsymbol{e}_1$ 为 $\boldsymbol{e}_2$ 或 $\boldsymbol{e}_3$ 或 $\boldsymbol{e}_4$ 时，θ 最大. 不妨设 $-\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$，则

$$Q=-\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)=1+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4>\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_4$$

注意到 $\cos\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，故有 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<0$.

13*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}>0 \tag{16.37}$$

证明 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任取一点 P，过 P 向四面体的侧面分别作垂线，垂足分别为 B_1,B_2,B_3,B_4，易知 A_1 与 P 在平面 $B_2B_3B_4$ 的异侧等，所以 P 在四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 内，记 $\angle B_iPB_j=\alpha_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则 $\theta_{ij}=\pi-\alpha_{ij}$，代入式(16.36)，即可得式(16.37).

14*. 设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，记 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}<3 \tag{16.38}$$

证明 $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\alpha_{ij}}{2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{2}(1+\cos\alpha_{ij})=3+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\alpha_{ij}<3$

15*. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的诸内二面角为 $\theta_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}>3 \tag{16.39}$$

证明 $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{2}(1+\cos\theta_{ij})=3+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}>3$

16*. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，外接球球心在其内部，外接球半径为 R，则

$$12R^2<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2 \tag{16.40}$$

证明 设 $\angle A_iOA_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，在 $\triangle A_iOA_j$ 中，将 $\cos\alpha_{ij}=\dfrac{2R^2-a_{ij}^2}{2R^2}$ 代入式(16.36)，整理即可得式(16.40)．结合式(16.27)，我们有：

17. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，外接球球心在其内部，外接球半径为 R，则

$$12R^2<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}^2\leqslant 16R^2 \tag{16.41}$$

18. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，中线长为 $m_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\sum_{i=1}^4 m_i<\frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij} \tag{16.42}$$

其中系数 $\dfrac{2}{3}$ 是最佳的.

证明 由中线的意义，有 $\boldsymbol{m}_1=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}_{12}+\boldsymbol{a}_{13}+\boldsymbol{a}_{14})$，所以

$$\begin{aligned}m_1=|\boldsymbol{m}_1|=&\left|\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_{12}+\boldsymbol{a}_{13}+\boldsymbol{a}_{14})\right|<\\&\frac{1}{3}(|\boldsymbol{a}_{12}|+|\boldsymbol{a}_{13}|+|\boldsymbol{a}_{14}|)=\\&\frac{1}{3}(a_{12}+a_{13}+a_{14})\end{aligned}$$

同理

$$m_2<\frac{1}{3}(a_{12}+a_{23}+a_{24}),m_3<\frac{1}{3}(a_{13}+a_{23}+a_{34}),m_4<\frac{1}{3}(a_{14}+a_{24}+a_{34})$$

以上四式相加 得

$$\sum_{i=1}^4 m_i<\frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}a_{ij}$$

下面证明系数 $\dfrac{2}{3}$ 是最佳的. 取 $a_{12}=a_{13}=a_{14}=1,a_{23}=a_{24}=a_{34}=\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，由性质 1.16 可知 $m_1=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-3\varepsilon^2}$，$m_2=m_3=m_4=\dfrac{1}{3}\sqrt{1+5\varepsilon^2}$，则

$$\sum_{i=1}^4 m_i=\frac{1}{3}\sqrt{9-3\varepsilon^2}+\sqrt{1+5\varepsilon^2}\to 2\quad(\varepsilon\to 0)$$

$$\frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij} = 2 + 2\varepsilon \to 2 \quad (\varepsilon \to 0)$$

16.3 重心坐标法

16.3.1 重心坐标的基本概念及几个引理

在三维空间中任取一个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 叫作坐标四面体.对于该空间中任意一点 M,将下述四个四面体的体积的比值

$$V_{A_2A_3A_4M} : V_{A_1A_3A_4M} : V_{A_1A_2A_4M} : V_{A_1A_2A_3M} = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 \tag{16.43}$$

叫作点 M 的体积坐标,或叫作重心坐标,记为

$$M = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4) \tag{16.44}$$

注意 (1)这里的四个四面体的体积,都是带符号的.通常约定,点 M 在坐标四面体侧面内侧时,规定为正,否则为负.

(2)对于点 M 的重心坐标即可记为 $(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4)$,也可记为 $(k\mu_1 : k\mu_2 : k\mu_3 : k\mu_4)$,即其记法并非唯一,可以相差一个非零常数因子.

(3)令 $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i}$ $(i=1,2,3,4)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i = 1$.我们把 $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4)$ 叫作点 M 的规范坐标.

易知:对于坐标四面体 $A_1A_2A_3A_4$,顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 的重心坐标为

$$A_1 = (1:0:0:0),\ A_2 = (0:1:0:0),\ A_3 = (0:0:1:0)\ A_1 = (0:0:0:1)$$

重心坐标为 $G = \left(\dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{4}\right)$,内心坐标为 $I = (S_1 : S_2 : S_3 : S_4)$.

下面我们推导几个引理.

引理 16.5 设坐标四面体的诸顶点 A_i 在某个直角坐标系中的坐标为 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1,2,3,4)$.令点 $M = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4)$,它的直角坐标为 (x, y, z),则

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i} = \sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i,\ y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i} = \sum_{i=1}^{4}\lambda_i y_i,\ z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i} = \sum_{i=1}^{4}\lambda_i z_i \tag{16.45}$$

这里 $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}\mu_i}$ $(i=1,2,3,4)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i = 1$.

证明　如图 16.1 所示，设 $V_{四面体A_2A_3A_4M}=V_1, V_{四面体A_1A_3A_4M}=V_2$，$V_{四面体A_1A_2A_4M}=V_3, V_{四面体A_1A_2A_3M}=V_4$. 联结 A_4M 交侧面 f_4 于 A_5，联结 A_3A_5 交 A_1A_2 于点 A_6，设点 A_5 的直角坐标为 (x_5, y_5, z_5)，点 A_6 的直角坐标为 (x_6, y_6, z_6)，由定比分点公式，有

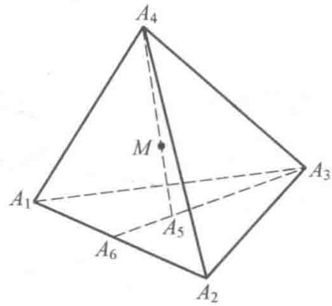


图 16.1

$$x_6=\frac{A_6A_2x_1+A_1A_6x_2}{A_1A_2}=\frac{S_{\triangle A_2A_3A_5}x_1+S_{\triangle A_1A_3A_5}x_2}{S_{\triangle A_2A_3A_5}+S_{\triangle A_1A_3A_5}}$$

又由定比分点公式，有

$$x_5=\frac{A_3A_5x_6+A_5A_6x_3}{A_3A_6}=\frac{(S_{\triangle A_2A_3A_5}+S_{\triangle A_1A_3A_5})x_6+S_{\triangle A_1A_2A_5}x_3}{S_{\triangle A_2A_3A_4}}$$

将 x_6 代入上式，得

$$x_5=\frac{S_{\triangle A_2A_3A_5}x_1+S_{\triangle A_1A_3A_5}x_2+S_{\triangle A_1A_2A_5}x_3}{S_{\triangle A_2A_3A_4}}$$

设点 A_1 和 A_2 到平面 $A_3A_4A_5$ 的距离为 l_1 和 l_2，则

$$S_{\triangle A_1A_3A_5}:S_{\triangle A_2A_3A_5}=V_{四面体A_1A_3A_4A_5}V_{四面体A_2A_3A_4A_5}=l_1S_{\triangle A_3A_4A_5}:l_2S_{\triangle A_3A_4A_5}=$$
$$l_1:l_2=l_1S_{\triangle A_3A_4M}:l_2S_{\triangle A_3A_4M}=V_2:V_1$$

同理　$$S_{\triangle A_1A_3A_5}:S_{\triangle A_1A_2A_5}=V_2:V_3$$

所以　$$S_{\triangle A_2A_3A_5}:S_{\triangle A_1A_3A_5}:S_{\triangle A_1A_2A_5}=V_1:V_2:V_3$$

由此可得

$$\frac{S_{\triangle A_2A_3A_5}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{V_1}{V_1+V_2+V_3}, \frac{S_{\triangle A_1A_3A_5}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{V_2}{V_1+V_2+V_3}, \frac{S_{\triangle A_1A_2A_5}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{V_3}{V_1+V_2+V_3}$$

所以 $x_5=\dfrac{S_{\triangle A_2A_3A_5}x_1+S_{\triangle A_1A_3A_5}x_2+S_{\triangle A_1A_2A_5}x_3}{S_{\triangle A_2A_3A_4}}=\dfrac{V_1x_1+V_2x_2+V_3x_3}{V_1+V_2+V_3}$

又由定比分点公式，有

$$x=\frac{A_4Mx_5+MA_5x_4}{A_4A_5}=\frac{(V_1+V_2+V_3)x_5+V_4x_4}{V}$$

将上式代入，得

$$x=\frac{V_1x_1+V_2x_2+V_3x_3+V_4x_4}{V}$$

即
$$x=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i$$
同理可证 $y=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i y_i, z=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i z_i$. 证毕.

引理 16.6　设三维空间中坐标四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 和四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 V 和 V'，四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 诸顶点 B_i 的重心规范坐标为 $(\lambda_{i1}:\lambda_{i2}:\lambda_{i3}:\lambda_{i4})$ $(i=1,2,3,4)$，则
$$V'=V\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34}\\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44}\end{vmatrix} \tag{16.46}$$

证明　由四面体的体积公式可知
$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}, V'=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & 1\\ a_2 & b_2 & c_2 & 1\\ a_3 & b_3 & c_3 & 1\\ a_4 & b_4 & c_4 & 1\end{vmatrix}$$
这里 (a_i,b_i,c_i) 为四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的顶点 $B_i(i=1,2,3,4)$ 的直角坐标.利用行列式乘法法则及定理 16.5，得
$$\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34}\\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & 1\\ a_2 & b_2 & c_2 & 1\\ a_3 & b_3 & c_3 & 1\\ a_4 & b_4 & c_4 & 1\end{vmatrix}$$
即引理 16.6 成立.

引理 16.7　若三维空间中坐标四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的 4 个顶点的重心坐标为 $(\mu_{i1}:\mu_{i2}:\mu_{i3}:\mu_{i4})$ $(i=1,2,3,4)$，则此 4 个点在同一平面上的充要条件是
$$\begin{vmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24}\\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34}\\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44}\end{vmatrix}=0 \tag{16.47}$$

引理 16.8　M 为坐标四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，连线 A_iM 的延长线分别交对面于 $B_i(i=1,2,3,4)$，若 M 的重心坐标为 $(\mu_1:\mu_2:\mu_3:\mu_4)$，则
$$B_1=(0:\mu_2:\mu_3:\mu_4), B_2=(\mu_1:0:\mu_3:\mu_4)$$
$$B_2=(\mu_1:\mu_2:0:\mu_4)\ B_2=(\mu_1:\mu_2:\mu_3:0) \tag{16.48}$$

证明　由定义，B_1 的重心坐标为 $(0:V_{四面体A_1B_1A_3A_4}:V_{四面体A_1A_2B_1A_4}:V_{四面体A_1A_2A_3B_1})$，由引理 16.5 的证明可知

$$S_{\triangle A_2A_3B_1} : S_{\triangle A_1A_3B_1} : S_{\triangle A_1A_2B_1} = V_1 : V_2 : V_3$$

所以

$$V_{\text{四面体}A_1B_1A_3A_4} : V_{\text{四面体}A_1A_2B_1A_4} : V_{\text{四面体}A_1A_2A_3B_1} = S_{\triangle A_2A_3B_1} : S_{\triangle A_1A_3B_1} : S_{\triangle A_1A_2B_1} = V_1 : V_2 : V_3 = \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$$

由此，得 $B_1 = (0 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4)$. 其余同理可证. 证毕.

引理 16.9　设点 B 关于坐标四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心规范坐标为 $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4)$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \mathbf{0} \tag{16.49}$$

证明　由引理 16.5 知 $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ 的横坐标为

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\left[\left(\sum\lambda_1 x_1\right) - x_i\right] = \sum\lambda_1\sum\lambda_1 x_1 - \sum\lambda_1 x_1 = 0$$

同理可证明其他坐标亦为 0. 证毕.

16.3.2　重心坐标的应用

1. 设 M 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点，连线 A_iM 的延长线分别交对面于点 $B_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，则

$$V_{\text{四面体}B_1B_2B_3B_4} \leqslant \frac{1}{3^3}V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4} \tag{16.50}$$

式中等号当且仅当 M 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心时成立.

这里，四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 叫作西瓦(Ceva)四面体.

证明　取 $A_1A_2A_3A_4$ 为坐标四面体，并设点 M 的重心坐标为 $(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4)$，由于 M 在四面体的内部，因而可设 $\mu_i > 0(i = 1,2,3,4)$. 由引理 16.7 知

$$B_1 = (0 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4), B_2 = (\mu_1 : 0 : \mu_3 : \mu_4)$$
$$B_2 = (\mu_1 : \mu_2 : 0 : \mu_4)\ B_2 = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : 0)$$

其规范坐标为

$$B_1 = \left(0 : \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq 1}\mu_i} : \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq 1}\mu_i} : \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq 1}\mu_i}\right), B_2 = \left(\frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq 2}\mu_i} : 0 : \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq 2}\mu_i} : \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq 2}\mu_i}\right)$$

$$B_3 = \left(\frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq 3}\mu_i} : \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq 3}\mu_i} : 0 : \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq 3}\mu_i}\right), B_4 = \left(\frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq 4}\mu_i} : \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq 4}\mu_i} : \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq 4}\mu_i} : 0\right)$$

由引理 16.6，知

$$V_{\text{四面体}B_1B_2B_3B_4}=V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4}\cdot\begin{vmatrix}0 & \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq1}\mu_i} & \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq1}\mu_i} & \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq1}\mu_i}\\ \frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq2}\mu_i} & 0 & \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq2}\mu_i} & \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq2}\mu_i}\\ \frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq3}\mu_i} & \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq3}\mu_i} & 0 & \frac{\mu_4}{\sum\limits_{i\neq3}\mu_i}\\ \frac{\mu_1}{\sum\limits_{i\neq4}\mu_i} & \frac{\mu_2}{\sum\limits_{i\neq4}\mu_i} & \frac{\mu_3}{\sum\limits_{i\neq4}\mu_i} & 0\end{vmatrix}=$$

$$V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4}\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\mu_i}{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\mu_j}\right)\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=$$

$$3V_{\text{四面体}A_1A_2A_3A_4}\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\mu_i}{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\mu_j}\right)$$

利用算术 — 几何平均不等式,得

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\mu_j\geqslant 3\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\mu_j\right)^{\frac{1}{3}}\quad (i=1,2,3,4)$$

将此 4 个不等式相乘,得

$$\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\mu_j\right)\geqslant 3^4\prod_{i=1}^{4}\mu_i$$

代入前式,既得所证. 由以上的证明可知等号成立的充要条件是 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$,即 M 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心.

2.(杨世国) 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的外接球半径为 R',则

$$R'R^2\geqslant 3^2r^3\tag{16.51}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体,M 为其重心时等号成立.

先证明如下引理.

引理 16.10　对于四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$,记 $b_{ij}=|B_iB_j|\ (1\leqslant i<j\leqslant 4)$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}b_{ij}^2\sum_{i=1}^{4}S_i^2\geqslant 36V^2\tag{16.52}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体,M 为其重心时等号成立.

证明　设点 C 为空间任一点,$C=(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4)$(其中 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=$

1). 由引理 16.9，对于空间任意一点 Q，有

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i \overrightarrow{QA_i}^2=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i(\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CA_i})^2=$$

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i \overrightarrow{QC}^2+2\overrightarrow{QC}\cdot\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{CA_i}+\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{CA_i}^2=$$

$$\overrightarrow{QC}^2+\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{CA_i}^2 \tag{16.53}$$

在式(16.53)中，令 $Q=A_j(j=1,2,3,4)$，并两边同乘以 λ_j，得

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\lambda_j\overrightarrow{A_iA_j}^2=\lambda_j\overrightarrow{CA_j}^2+\lambda_j\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{CA_i}^2 \tag{16.54}$$

式(16.54)两边对指标 j 求和，并注意到 $\sum_{j=1}^{4}\lambda_j=1$，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j\overrightarrow{A_iA_j}^2=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{CA_i}^2 \tag{16.55}$$

设 $x_i(i=1,2,3,4)$ 为任意一组正实数，在空间取一点 C'，使点 C' 关于西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的重心规范坐标为 $(\lambda'_1:\lambda'_2:\lambda'_3:\lambda'_4)$，其中 $\lambda'_i=x_i/(\sum x_1)(i=1,2,3,4)$. 利用式(16.55)的结果，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda'_i\lambda'_jb_{ij}^2=\sum_{i=1}^{4}\lambda'_i\overrightarrow{C'B_i}^2$$

即

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_jb_{ij}^2=(\sum x_1)\sum_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{C'B_i}^2 \tag{16.56}$$

由于 $0<\lambda'_i<1(i=1,2,3,4)$，所以 C' 在四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的内部，从而点 C' 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内部. 过点 C' 作四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的垂线，垂足为 $Q_i(i=1,2,3,4)$，显然有

$$\sum_{i=1}^{4}x_iC'B_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{4}x_iC'Q_i^2 \tag{16.57}$$

等号成立当且仅当 $Q_i=B_i(i=1,2,3,4)$，即西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 是点 C' 关于四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂足四面体.

利用柯西不等式与

$$\sum_{i=1}^{4}|C'Q_i|\cdot S_i=3V$$

得

$$(\sum x_iC'Q_i^2)(\sum x_i^{-1}S_i^2)\geqslant(\sum|C'Q_i|\cdot S_i)^2=9V^2 \tag{16.58}$$

由(16.56)，(16.57)，(16.58)三式得

$$(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_jb_{ij}^2)(\sum x_1^{-1}S_1^2)\geqslant 9(\sum x_1)V^2 \tag{16.59}$$

在式(16.59)中，令 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ 便得不等式(16.52)，易知当四面

体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且点 M 为其重心时式(16.52)中等号成立.

式(16.51)的证明 由式(3.14):$\sum S_1^2 \leqslant \frac{16}{3}R^4$,式(4.7):$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} b_{ij}^2 \leqslant 16R'^2$ 及式(15.52),得

$$R'^2 \cdot R^4 \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3 V^2 \tag{16.60}$$

由式(4.14):$8\sqrt{3}r^3 \leqslant V$ 及(16.60),得(16.51),且由证明过程易知当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且点 M 为其重心时式(16.51)中等号成立.

3.(杨世国)设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的外接球半径为 R',内切球半径为 r',则

$$R'R^2 \geqslant 3^5 r'^3 \tag{16.61}$$

当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体,M 为其重心时等号成立.

证明 设西瓦四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积为 V',由式(16.50)有

$$V \geqslant 3^3 V' \tag{16.62}$$

由式(16.61)及 $8\sqrt{3}r'^3 \leqslant V'$,有

$$R' \cdot R^2 \geqslant \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^3}V \geqslant \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^3} \cdot 3^3 V' \geqslant \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^3} \cdot 3^3 \cdot 8\sqrt{3}r'^3 = 3^5 r'^3$$

且由证明过程易知当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且 M 为其重心时式(16.61)中等号成立.

4.给定四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 及内部任一点,直线段 A_iP 与对面的交点为 $B_i(i=1,2,3,4)$,则比值 $A_iP/PB_i(i=1,2,3,4)$ 中,至少有一个不大于 3,也至少有一个不小于 3.

证明 取四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为坐标四面体,设点 A_i 的直角坐标为 $(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$,点 P 的重心规范坐标为 $(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4)$,直角横坐标为 x_P,并设点 B_1 的横坐标为 x_{B_1},则点 B_1 的重心规范坐标为 $\left(0:\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}:\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}:\frac{\lambda_4}{1-\lambda_1}\right)$.由引理16.5知

$$x_P = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i, x_{B_1} = \sum_{i=2}^4 \frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_1}$$

于是

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{x_P - x_1}{x_{B_1} - x_P}\ \frac{\sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i - x_1}{\sum_{i=2}^4 \frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_1} - \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i} = \frac{(1-\lambda_1)\left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i - x_1\right)}{\sum_{i=2}^4 \lambda_i x_i - (1-\lambda_1)\sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i} = \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}$$

同理 $$\frac{A_iP}{PB_i} = \frac{1-\lambda_i}{\lambda_i} \quad (i=2,3,4)$$

如果$\dfrac{A_iP}{PB_i}=\dfrac{1-\lambda_i}{\lambda_i}>3(i=2,3,4)$，则$1-\lambda_i>3\lambda_i(i=1,2,3,4)$，四式相加得$4-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)>3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，得$3>3$的矛盾，这说明四个比值中至少有一个不大于3.

同理可证：四个比值中至少有一个不小于3. 证毕.

5. 在四面体$A_1A_2A_3A_4$的各棱A_iA_j上分别取不同于顶点的点$B_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，则四面体$A_1B_{12}B_{13}B_{14}$，$A_2B_{12}B_{23}B_{24}$，$A_3B_{13}B_{23}B_{34}$，$A_4B_{14}B_{24}B_{34}$中至少有一个体积不大于原四面体体积的八分之一.

证明 由于点$B_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$均在各棱上，即同时在两个侧面上，取四面体$A_1A_2A_3A_4$为坐标四面体，所以重心规范坐标中有两个分量为0，则

$$B_{12}=(x:1-x:0:0),B_{13}=(y:0:1-y:0)$$
$$B_{14}=(z:0:0:1-z),B_{23}=(0:\lambda:1-\lambda:0)$$
$$B_{24}=(0:\vartheta:0:1-\vartheta),B_{34}=(0:0:\omega:1-\omega)$$

由引理16.6，有

$$V_{\text{四面体}A_1B_{12}B_{13}B_{14}}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x & 1-x & 0 & 0\\ y & 0 & 1-y & 0\\ z & 0 & 0 & 1-z\end{vmatrix}\cdot V=(1-x)(1-y)(1-z)V$$

同理

$$V_{\text{四面体}A_2B_{12}B_{23}B_{24}}=x(1-\lambda)(1-\vartheta)V$$
$$V_{\text{四面体}A_3B_{13}B_{23}B_{34}}=y\lambda(1-\omega)V$$
$$V_{\text{四面体}A_4B_{14}B_{24}B_{34}}=z\vartheta\omega V$$

注意到$x\in(0,1)$，$x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$. 以上四式相乘

$$\text{乘积右端}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot V^4=\left(\frac{1}{8}V\right)^4$$

故四个四面体体积不能大于原四面体体积的$\dfrac{1}{8}$. 证毕.

6. 设四面体$A_1A_2A_3A_4$的重心为G，过点G的平面交棱A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4分别于点B_2，B_3，B_4，设四面体$A_1B_2B_3B_4$的体积为V_1，五面体$B_2B_3B_4\text{-}A_2A_3A_4$的体积为$V_2$，则

$$0\leqslant V_2-V_1\leqslant\frac{5}{32}V \tag{16.63}$$

证明 设$|A_1B_i|:|B_iA_i|=\alpha_i:(1-\alpha_i)(i=2,3,4)$. 因为$B_i$在$A_1A_i$上，故$0<\alpha_i\leqslant 1$. 由性质1.10，得

$$\frac{V_1}{V}=\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

取四面体$A_1A_2A_3A_4$为坐标四面体，由于$B_i(i=2,3,4)$在四面体的棱上，

所以其重心规范坐标中有两个分量为 0,计算知

$$B_2=(1-\alpha_2:\alpha_2:0:0),B_3=(1-\alpha_3:0:\alpha_3:0)$$

$$B_4=(1-\alpha_4:0:0:\alpha_4),G=\left(\frac{1}{4}:\frac{1}{4}:\frac{1}{4}:\frac{1}{4}\right)$$

由于 G,B_2,B_3,B_4 四点在同一平面上,可知

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1-\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 1-\alpha_3 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 1-\alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix}=0$$

即
$$4\alpha_2\alpha_3\alpha_4-(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)=0 \tag{16.64}$$

利用算术 — 几何平均不等式,得

$$4\alpha_2\alpha_3\alpha_4=(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)\geqslant 3\sqrt[3]{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2}$$

所以
$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

所以
$$\frac{V_2-V_1}{V}=1-\frac{2V_1}{V}\leqslant 1-2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$$

另外,由式(16.64),得

$$\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}=4 \tag{16.65}$$

由 $0<\alpha_i\leqslant 1$,得$\frac{1}{\alpha_i}\geqslant 1$,又由式(16.65)知$\frac{1}{\alpha_i}\leqslant 2$,不妨设$\frac{1}{\alpha_2}\geqslant\frac{1}{\alpha_3}\geqslant\frac{1}{\alpha_4}$.

当$\frac{1}{\alpha_2}=2$,即 $\alpha_2=\frac{1}{2}$,这时 $\alpha_3=\alpha_4=1$,故 $V_1=V_2$,不等式左边成立;

当$\frac{1}{\alpha_2}<2$ 时,设$\frac{1}{\alpha_2}=2-d_1$,$\frac{1}{\alpha_3}=1+d_2$,$\frac{1}{\alpha_4}=1+d_3$,则 $0<d_1<1$,$0\leqslant d_2$,$d_3<1$,且满足 $d_1=d_2+d_3$. 于是

$$\frac{V_1}{V}=\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\frac{1}{(2-d_1)(1+d_2)(1+d_3)}=\frac{1}{(2-d_1)(1+d_2+d_3+d_2d_3)}\leqslant$$
$$\frac{1}{(2-d_1)(1+d_2+d_3)}=\frac{1}{(2-d_1)(1+d_1)}=\frac{1}{2+d_1-d_1^2}<\frac{1}{2}$$

不等式左边仍成立. 证毕.

问题与猜想

第十七章

1. 设三面角 $S\text{-}ABC$ 的三个面角为 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$，其内任意一条射线 SP 与三条棱 SA,AB,SC 所夹的角为 $\varphi_A,\varphi_B,\varphi_C$. 则

(1) $\sin\varphi_A+\sin\varphi_B+\sin\varphi_C\geqslant\sqrt{3}$；

(2) $\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C\geqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

注 如果证明了(1)，就可以证明猜想 20.

2. 设 S_1,S_2,S_3,S_4 是四面体的侧面积，r 是四面体的内切球半径. 证明或否定

$$\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}+\frac{1}{S_4^2}\leqslant\frac{1}{27r^4}$$

当且仅当四面体为正四面体时取等号.

3. 设 r_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到棱 $A_iA_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的距离，R_i 分别是点 P 到顶点 $A_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的距离，证明或否定

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij}<\sum_{i=1}^{4}R_i$$

且系数 1 是最佳的.

4. 设 r_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到棱 $A_iA_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的距离，R_i 分别是点 P 到顶点 $A_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的距离. 证明或否定

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij} < \frac{4(2\sqrt{2}-1)}{7}\sum_{i=1}^{4} R_i$$

5. 设 r_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到棱 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 的距离，r_i 分别是点 P 到侧面 $f_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的距离，证明或否定

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} r_{ij} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{4} r_i$$

6. 设 R_i，r_i 分别是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点 P 到顶点 A_i 和侧面 $f_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的距离，证明或否定

$$\sum R_i > 2\sqrt{2}\sum r_i$$

7. 设 S_1，S_2，S_3，S_4 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面积，r 是该四面体的内切球半径，$S=\sum_{i=1}^{4} S_i$. 证明或否定

$$\frac{S}{3\sqrt{3}\,r^2} \geqslant \sum_{i=1}^{4}\frac{S-2S_i}{S_i}$$

8. 设 r_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点 P 到顶点 A_i 对面的距离，$R_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 是点 P 到顶点 A_i 的距离，证明或否定

$$\sum R_1R_2R_3 \geqslant 27\sum r_1r_2r_3$$

9. 设 P 是四面体 $ABCD$ 内任意一点，AP，BP，CP，DP 分别交面 BCD，CDA，DAB，ABC 于点 A'，B'，C'，D'，猜想

$$\begin{aligned}&\frac{1}{PA'\cdot PB'}+\frac{1}{PA'\cdot PC'}+\frac{1}{PA'\cdot PD'}+\\&\frac{1}{PB'\cdot PC'}+\frac{1}{PB'\cdot PD'}+\frac{1}{PC'\cdot PD'}\geqslant\\&4\left(\frac{1}{AA'\cdot BB'}+\frac{1}{AA'\cdot CC'}+\frac{1}{AA'\cdot DD'}+\right.\\&\left.\frac{1}{BB'\cdot CC'}+\frac{1}{BB'\cdot DD'}+\frac{1}{CC'\cdot DD'}\right)\end{aligned}$$

10. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \geqslant 3^{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{4} S_i}\cdot V$$

注 如果证明了此猜想就可以证明猜想 23.

11. 设四面体的侧面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，体积为 V，以 $\sqrt{S_i}(i=1,2,3,4)$ 为四个侧面面积的四面体的体积为 V'，猜想

$$V'^2 \geqslant \frac{2\sqrt[4]{3}}{9}V$$

12. 设 m_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 顶点 $A_i(i=1,2,3,4)$ 所对的中线，r 是四面

体的内切球半径.猜想

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{m_i^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}$$

13. 设 l_1, l_2, l_3 分别是对棱 $A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3$ 中点的连线的长. $a, a'; b, b'; c, c'$ 分别为对棱 $A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3$ 的长.猜想

$$4\sum (l_1 l_2)^2 \leqslant \sum (aa')^2$$

14. 设四面体的侧面积为 $S_i (i=1,2,3,4)$，体积为 V，猜想

$$\sqrt{\prod (S-2S_1)} \geqslant 4V^{\frac{4}{3}}$$

15. 设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内一点，记

$$\angle A_i P A_j = \alpha_{ij} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{12}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{13}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{14}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{21}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{23}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{24}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{31}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{32}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{34}}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{41}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{42}}{2} & -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha_{43}}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

猜想 $A > 0$.

注　如果证明了此猜想利用二次型就可以证明猜想 3.

16. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 f_i 的外接圆的半径为 $R_i (i=1,2,3,4)$，四面体的外接球的半径为 R，猜想

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{R_i^2} \geqslant \frac{9}{2R^2}$$

17. 设 h_i, r_i 分别是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 侧面 $f_i (i=1,2,3,4)$ 上的高和旁切球半径，当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时，猜想

$$\sum \frac{1}{r_i - \lambda r} \geqslant \frac{4-\lambda}{2-\lambda} \sum \frac{1}{h_i - \lambda r}$$

当 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 时取等号.

18. 在四面体 $PABC$ 中，若 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90°$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$，$\triangle ABC$ 内切圆的半径分别为 r_A, r_B, r_C, r_P，r 是四面体 $PABC$ 内切球半径. 猜想

(1) $r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 \leqslant 9(3-2\sqrt{2}) r_P^2$；

(2) $\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} \geqslant \frac{2\sqrt{3}+3}{3r_P^2}$；

(3) $r \leqslant \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} r_P$.

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

19. 设点 P 是棱长为 a 的正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，P 到各顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$，猜想

$$\sum_{i=1}^{4} \sqrt{R_i} \leqslant 2\sqrt[4]{6}\sqrt{a}$$

20. 设 P 是正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，点 P 到顶点 A_i 的距离为 $R_i(i=1,2,3,4)$，到各棱 A_iA_j 的距离分别为 $h_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，猜想

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} h_{ij} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^{4} R_i$$

当且仅当点 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中心或顶点时取等号.

21. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 存在棱切球，棱切球半径为 R^*，外接球半径为 R，$a_{ij}=|A_iA_j|(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，猜想

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} a_{ij}^2 \leqslant 14R^2 + 6R^{*2}$$

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时取等号.

22. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 各侧面的面积 $S_i(i=1,2,3,4)$ 为定值，求四面体的最大体积.

23. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球和内切球的半径分别为 R 和 r，其内一点 P 到各侧面的距离为 $d_i(i=1,2,3,4)$，猜测

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{2}{r^2} + \frac{6}{Rr}$$

24. 设点 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，记 $R_i=|PA_i|(i=1,2,3,4)$，$a_{ij}=|A_iA_j|$，则

$$\sum R_i^k < \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} a_{ij}^k \quad (k \geqslant 1, k \in \mathbf{N})$$

其中系数 1 是最佳的.

25. 设 R_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的外接圆半径，R 是四面体的外接球半径，则

$$\sum R_1 \geqslant \frac{8\sqrt{2}}{3} R$$

参 考 文 献

[1] 沈文选. 单形论导引[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2000.

[2] 匡继昌. 常用不等式[M]. 4版. 济南：山东科学技术出版社，2010.

[3] 沈文选，张垚，冷岗松. 奥林匹克数学中的几何问题[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2004.

[4] 单墫. 几何不等式[M]. 上海：上海教育出版社，1980.

[5] 杨路. Cayley 定理的一个应用[J]. 数学通报，1981，6：30-31.

[6] 冷岗松，万振东，唐立华. 再论四面体的一个猜想[M]//陈计，叶中豪. 初等数学前沿. 南京：江苏教育出版社，1996：263-265.

[7] 唐立华. 关于四面体一个猜想的推广[M]//杨学枝. 不等式研究. 拉萨：西藏人民出版社，2000：363-368.

[8] 杨学枝. 关于四面体的一个不等式[J]. 数学通讯，2001，7：38.

[9] 马统一. n 维欧氏空间的 Child 不等式[J]. 数学通报，1998，5：35-37.

[10] 孔令恩. 四面体的对棱所成的三角形[J]. 数学通讯，2002，19：25-27.

[11] 樊益武. 关于四面体棱切球的一个猜想[J]. 数学通讯，2001，11：32.

[12] 樊益武. 四面体中的一类不等式[J]. 中等数学，2002，1：27-28.

[13] 周永国. 关于四面体中面和角平分面的不等式[J]. 数学通报，2010，49(10)：57-58.

[14] 杨世国. 关于四面体的一类几何不等式[J]. 许昌学院学报，2002，21(2)：1-3.

[15] 杨世国. 关于 Ceva 四面体的两个不等式[J]. 许昌学院学报，2004，23(2)：5-7.

[16] 孔令思. 三角形到四面体的一个等价变换[J]. 数学通讯，1995，1：23-24.

[17] 段继艳，王卫东. 四面体中与外心相关的不等式[J]. 数学通报，2014，7：59-60.

[18] 陈计，王振. Neberg-Pedoe 不等式的四面体推广[J]. 数学通讯，1994，2：22-24.

内容简介

本书共收集四面体不等式 346 个，其中包含大量作者的首创成果，还介绍了四面体不等式的几种证明方法，最后提出了 25 个猜想供读者研究。本书比较深入和系统地研究了四面体的棱、角、面及其外接球半径和内切球半径等几何元素之间的不等关系，内容新颖，富有启发性。

本书可作为进一步研究四面体不等式的参考文献，也可作为数学奥林匹克学习的参考资料。本书适合高中学生、大学学生、教师，以及不等式爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

四面体不等式/樊益武编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.1

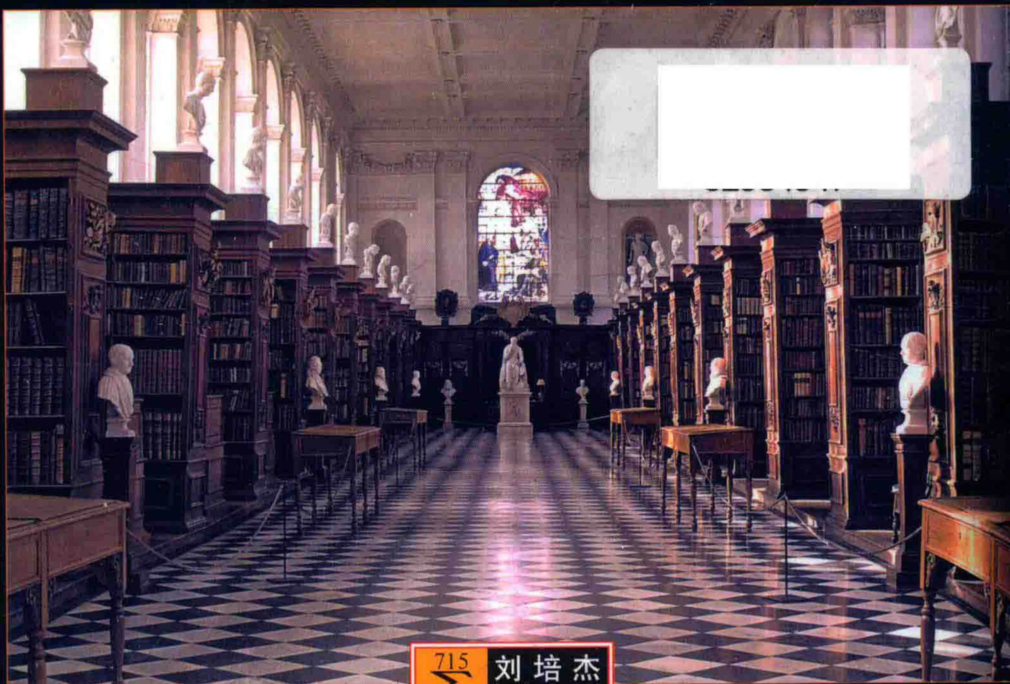
ISBN 978-7-5603-6396-7

Ⅰ.①四…　Ⅱ.①樊…　Ⅲ.①四面体-不等式
Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000838 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.25　字数 256 千字
版　　次　2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6396-7
定　　价　68.00 元

Simianti Budengshi



715 $\sum_{i=0}$ 刘培杰 数学工作室

图片来源：《伟大的建筑者》

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 **刘培杰数学工作室**
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

ISBN 978-7-5603-6396-7
9 787560 363967 >

上架建议：不等式

定价 68.00 元